TRATTATO

DI

GEOMETRIA DESCRITTIVA.

GEOM

DI

professore de

PRIM.

CAPO DI

PROF

DALL

TRATTATO

DI

GEOMETRIA DESCRITTIVA

CON UNA COLLEZIONE DI 60 TAVOLE

DI C.-F.-A. LEROY

professore della Scuola Politecnica e della Normale, Cav. della Legion di Onore ec.

PRIMA VERSIONE DAL FRANCESE CON NOTE

DI

SALVATORE D'AYALA

CAPO DI RIPARTIMENTO DEL MINISTERO DI GUERRA, GIÀ CAPITANO DI ARTIGLIERIA

E

PAOLO TUCCI

PROFESSORE DI GEOMETRIA DESCRITTIVA NELLA SCUOLA DI PONTI E STRADE.

NAPOLI,
DALLA REALE TIPOGRAFIA DELLA GUERRA
1838.

I TRADUTTORI.

ometria descrittiva è la scienza la quale insegna a rappre-
i corpi forniti come sono delle tre dimensioni sopra un
i disegno il quale non ne offre che due; e due diversi
a questo si attingono. Col primo gli artisti in ispezieltà
ngono di far altrui palese la forma e la posizione rispet-
lcuni oggetti; col secondo di rinvenire le dimensioni
nembri onde un oggetto è composto allora quand'esse
leterminate dal suo collocamento, e dalla sua gran-
mezzo che vi si adopera è la *descrizione grafica*, la
e perciò tenersi siccome una specie di linguaggio ne-
tutti quanti gli artefici, fosse anche rivolta la loro
a sola imitazione de' corpi, che non sono suscettivi di
ometrica.
lo generale che mena alla descrizione grafica de' corpi
elle proiezioni, e le teoriche che se ne deducono son
la massima parte al celebre Monge, il quale ha sa-
da tante operazioni pratiche e disparate una scienza
alle arti d'imitazione.
ione di un corpo non fa conoscere se non due delle sue
però per averne un'idea compiuta fa d'uopo ottener
aragonare due proiezioni su due differenti piani dati
; della qual cosa possiamo passarci quando le proie-
berano come mezzi di descrizione, perocchè le ombre

che gettano i corpi gli uni sopra gli altri, danno colla loro forma, grandezza e gradazione un'idea precisa della terza dimensione.

E l'arte di segnare le ombre ne'disegni ha parimenti due differenti vedute: una ha per oggetto di determinare rigorosamente le proiezioni de'loro contorni, la linea che separa la parte illuminata di una superficie dalla oscura, l'altra è diretta a regolare la gradazione dello tinte che debbono prendere le varie parti delle superficie ombreggiate, affinchè mostrino nel disegno tutto le apparenze di ombra e di lume che offrono gli oggetti imitati.

Quando poi si vuole abbracciare questo soggetto con tutta la generalità possibile, fa mestieri aver riguardo fra le altre cose alla forma ed alla posizione degli oggetti, non meno che alla forma ed alla posizione del quadro sul quale vanno rappresentati, acciò vi apparissero come son veduti dall'occhio dello spettatore, situato in un punto determinato; ed in ciò consiste propriamente l'arte della *prospettiva.* Si scorgerà facilmente che qui, come nella teorica delle ombre, fa d'uopo ammettere due parti distinte una interamente geometrica, che intende a determinare sul quadro la posizione di ciascun punto rappresentato e dicesi *prospettiva lineare;* l'altra che volge intorno alla intensità apparente delle ombre e della luce che debbe avere ciascuna parte del quadro è vien dimandata *prospettiva aerea*, e questa dipende da considerazioni fisiche dedotte dalle osservazioni e dalla esperienza sulla proprietà della luce, de'corpi che la riflettono e de' cambiamenti cui va soggetta prima di giungere all'occhio dello spettatore; per conseguenza il disegno di prospettiva è in generale un'applicazione del metodo delle proiezioni regolato secondo i principî suddetti. E le carte geografiche, quelle ridotte ad uso della navigazione, le topografiche, i disegni di architettura non sono che proiezioni adempiute con leggi diverse accomodate allo scopo avuto in mira nella descrizione della superficie terrestre, o delle opere che vi ha elevato la mano dell' uomo.

Il paragone delle proiezioni dello stesso oggetto su due diversi piani diventa però indispensabile, quando le proiezioni si usano

i mezzi d'investigazione, massime nelle applicazioni alla mecca pratica, sia che si abbia in mira la descrizione delle va- parti componenti una macchina, sia che si vogliano conside- le arti di tagliare le pietre e di lavorare i legnami.

i fatti, poi che le forze poste a nostro arbitrio non sempre on produrre un movimento determinato, spesso fa mestieri cè le macchine convertirle in altre le quali abbiano qualità nce a produrre l'effetto dimandato. Ogni macchina è com- di alquante parti e ciascuna di esse ha un fine particolare i potrebbe pervenire in vari modi. L'esposizione di tutte te le maniere colle quali possono scambiarsi gli elementi forze, e la descrizione particolare de' magisteri adoperati giugnervi ne' casi svariati della meccanica pratica costituisce delle più utili applicazioni della geometria descrittiva, cioè scrizione grafica delle parti elementari delle macchine.

rimente le leggi della meccanica, e la cognizione delle qua- fisiche delle materie servono ad assegnare le dimensioni e rme che devono avere le parti di un edifizio, perchè il loro me abbia una stabilità sufficiente: ma l'arte di dare a ciascu- ietra la configurazione necessaria affinchè collocata nel suo produca l'effetto dimandato è un'applicazione de' metodi proiezioni.

stesso è dell'arte del carpentiere la quale insegna a com- re i vari membri delle opere in legname usate nelle costru- terrestri o navali, dappoicchè la maniera adoperatavi per ortare in pezzi di legno le dimensioni ricavate dalle proie- non è che l'operazione inversa di quella con la quale si so- strutte le proiezioni medesime.

onde si rileva quanto sia fecondo di utili applicazioni il lo delle proiezioni testè enunciato, e di quale importanza dio delle teoriche che ne derivano per avvezzare i nostri non pure alla legge di continuità ed alla conoscenza degli ti, ma al maneggio degl'istrumenti che servono a portare vori quella precisione che nelle nostre cose si fa tuttavia rare.

A questo fine ci siamo proposti di volgere in italiano, e mettere a stampa il trattato di *Geometria descrittiva del signor Leroy*, opera compilata sul programma stabilito per la scuola politecnica francese, ed oltre i limiti dello stesso ampliata dall'autore a fine di riempiere le lacune che nelle opere di geometria descrittiva fin ora pubblicate si ravvisano, e di presentare un lavoro compiuto a coloro i quali per professione si dedicano allo studio di questa scienza.

L'ordine col quale ne sono esposte le dottrine, la chiarezza de' ragionamenti che servono ad istabilirle, la semplicità ed eleganza delle costruzioni, la moltiplicità degli esempi, l'esattezza de' disegni, e lo sviluppo di alcune teoriche non ancora bene dilucidate formano il pregio principale dell' opera che presentiamo al pubblico, della quale, speriamo, ci saprà grado.

Del nostro tenue lavoro non facciamo parola; perocchè le nostre note altra mira non hanno se non quella di ravvicinare i risultamenti dell'analisi alle costruzioni grafiche laddove n'è bisogno, e di porre a tale il lettore che possa applicare le teoriche alle questioni di prospettiva e di stereotomia. Per la qual cosa ci siamo permessi ancora di aggiungere alle teoriche esposte dall' autore alcune nozioni utili nelle pratiche esercitazioni.

PREFAZIONE

ROCEDIMENTI ingegnosi co' quali i taglia-pietre e i carri mettono in opera i loro disegni eran da lungo tempo :iuti in vero : ma non presentavano ordinariamente che i isolati, speciali per ciascun problema che l'ingegno della aveva dovuto inventare a mano a mano che andava 'urando novelle combinazioni di volte. Non fu che verso ı dell'ultimo secolo, che il celebre Monge ha costretti procedimenti diversi in un tuttinsieme di dottrina, della ha esposto i principi generali sotto il nome di Geomeescrittiva, formandone una scienza accomodata a rap:tare con esattezza i corpi ed a somministrare i mezzi vestigare le proprietà generali dell'estensione conside- ı una maniera astratta.

ıera che questo illustre geometra ha dettato intorno a ateria è senza dubbio un modello di chiarezza; pure in teoriche importanti si scorgono alcune lacune, nè gli sono assai numerosi e svariati perchè il lettore possa 'are la pratica de' metodi di proiezione. Inoltre è essen'imo nelle applicazioni di queste teoriche, che i disegni empre adempiuti con una maniera di punteggiamento

sottoposta a regole costanti, a fine di far conoscere senza ambiguità e con una specie di linguaggio parlante agli occhi di chicchessia la posizione rispettiva delle diverse parti costituenti l'oggetto contemplato.

Sotto tal punto doppio di veduta è stata scritta quest'opera, in cui ho seguito l'ordine adottato nel programma della Scuola Politecnica; per quanto lo ha permesso almeno la differenza che passa necessariamente fra un trattato scritto, ed un corso a voce, in cui la distribuzione delle materie dev'essere sottoposta al tempo, onde gli allievi han mestieri per compiere nello intervallo delle lezioni i lavori grafici, che vi si riferiscono: non pertanto ho creduto dovermi rinchiudere ne' limiti di questo programma, il quale per la breve durata degli studi nella Scuola medesima ha dovuto restrignersi molto; chè anzi, con moltiplicare gli esempi relativi a' problemi de' piani tangenti e delle intersecazioni delle superficie, ciocchè permetterà agli allievi di poter variare i dati di una medesima quistione, ho voltato in mente di offrire agl'ingegneri ed alle persone, che per condizione o per diletto vorranno approfondire questa scienza suscettiva di moltiplici applicazioni, i mezzi di studiare tutt'i trovati della geometria descrittiva. In conseguenza mi sono allargato sulle superficie sviluppabili e gl'inviluppi, su gli elicoidi sviluppabili o storti, sulla curvatura e gli sviluppi delle curve storte, sulla curvatura e sulle linee di curvatura delle superficie, di cui ho basato la teorica inferita da considerazioni sintetiche accompagnate da parecchi esempi. Intorno poi alle superficie storte tanto importanti per l'uso frequente nelle arti, una lunga esperienza mi ha convinto, che sulle prime convien meglio citarne solamente qualche caso semplicissimo e raccoglier poscia in un libro a parte tutte quante le materie della intera teorica ricca in questa specie di superficie, che ho avuto pensiero di chiarire con numerosi esempi, eseguendo le costruzioni indicate nella esposizione generale; d'altra parte quell'ordine bene si affà all'andamento delle lezioni della Scuola Politecnica

tà generali delle superficie storte sono esposte
i cui si ravvicinano all'applicazione alla stereo-
o meglio rilevasene tutta la importanza. Final-
ito in un'appendice, che termina l'opera, alcuni
nelle applicazioni della scienza, aggiuntavi una
ccinta de' disegni forniti di nota-rilievi, di che
ineare la fortificazione, ed è utile che gli allievi
uefatti.

i mente di esporre altrove le applicazioni della
scrittiva alle ombre ed alla stereotomia, pigliando
e mie dilucidazioni gli schizzi della stessa scuola
il che compirà quanto posson desiderare gli allie-
parte dell' insegnamento.

TRATTATO

DI

OMETRIA DESCRITTIVA

LIBRO PRIMO

DELLE LINEE RETTE E DELLE SUPERFICIE PIANE.

CAPITOLO PRIMO

NOZIONI PRELIMINARI.

ɪᴅ ogni passo che si fa nelle scienze o nelle arti sentesi il
ɪo di trasmettere altrui la esatta cognizione delle forme
resentano i corpi, sia per manifestare i rapporti geome-
n essi riconosciuti, sia per guidare l'artefice chiamato a
irli, assegnatene innanzi le dimensioni. Ora il più effica-
:utti quanti i modi ed anche il solo qualche volta, fatto per
ere bene a questo scopo è la *descrizione grafica de' corpi;*
altresì la mira principale della Geometria descrittiva, i
etodi generali per la fecondità delle loro vie di ricerca
poscia accomodati ad investigar nuove proprietà della
ione, e somministrano inoltre i procedimenti necessari
solvere i diversi problemi di prospettiva, di stereotomia, di
cazione ec.

: qui si presentano due specie di difficoltà: in prima i corpi
o sempre tre dimensioni; e bene però si comprende che

e del punto *a* sul piano suddetto. Nella stessa maniera
delle perpendicolari da tutt' i punti della retta *abd*...
le' punti A,B,D . . . . segna ciò che vien detta proie-
la retta *abd* sul piano fisso, la quale necessariamente
tta, perocchè tutte quelle perpendicolari sono eviden-
contenute nel piano condotto per una di esse *a*A e per
l. Laonde l'intersecazione del *piano proiettante da*A
o di proiezione VXY somministra la proiezione ABD.
almente la proiezione di una curva qualunque *mnp* è
de' piedi delle perpendicolari *m*M, *n*N, *p*P..... calate
liversi punti sul dato piano, la qual proiezione MNP.....
nea la cui curvatura differisce il più delle volte da quella
rva data nello spazio. D'altra parte tutte queste perpen-
formano insieme una superficie cilindrica, nel senso ge-
di tale vocabolo, chiamata il *cilindro proiettante* della
mnp.

ò posto: io dico, che un punto, una retta, o una curva
mpiutamente determinati di posizione, quando se ne as-
o le proiezioni sopra due dati piani fissi non paralleli, la
azione è conosciuta. Sieno nel fatto VXY, ed XYZ due
i questa specie, A ed A' le proiezioni date di un punto
pazio; se pel punto A s'innalza una perpendicolare inde-
A*a* sul piano VXY, questa retta passerà necessariamente
nto dimandato; ma questo dovrà trovarsi ancora sulla retta
nnalzata perpendicolarmente al piano XYZ; dunque non
tenere nello spazio che *una posizione unica* determinata
contro delle due perpendicolari. In verità se le due rette
d A' *a* non s'incontrassero, nello spazio non sarebbe alcun
che avesse per proiezioni A ed A'; e ciò prova sola-
che le due proiezioni di un punto non devono assumersi
itrio, bensì esservi una dipendenza, la quale or ora spie-
mo (n°. 10).

Sieno poi AD, ed A'D' le proiezioni di una retta inco- FIG. II.
sopra i due piani fissi VXY, XYZ. Immaginando per la
un piano indefinito DA*a* perpendicolare a VXY, conterrà

questo evidentemente la retta dimandata, la quale giacerà eziandio sul piano D'A'*a* condotto per D' A' perpendicolarmente ad XYZ; perlochè la linea incognita coinciderà necessariamente coll' incontro di detti due piani, il quale è una retta unica e *determinata*. Nè vi sarebbe eccezione che nel caso in cui i due piani proiettanti DA*a*, e D'A'*a* si confondessero in un solo, ciocchè supporrebbe che la retta nello spazio e le due proiezioni fossero tutte perpendicolari alla intersecaziono XY do'due piani. In tal caso due proiezioni di questa specie non basterebbero più per definire la retta data, e farebbe mestieri domandarne una terza sopr'altro piano fisso non parallelo alla intersecazione de' due primi.

7. Finalmente se sien date le proiezioni MNP, ed M'N'P', di una curva non conosciuta, e s'immagini che per la prima passi un cilindro perpendicolare al piano VXY, ed un altro per la seconda perpendicolare al piano XYZ; la curva dimandata dovrà trovarsi evidentemente su ciascuno di essi, epperò la posizione e la forma saranno determinate dalla loro intersecazione *mnp* la quale bene potrà essere una *linea a doppia curvatura;* cioè tale cho tutt' i suoi punti non sieno nel medesimo piano.

Laonde da ora innanzi con queste due proiezioni determineremo graficamento un punto, o una linea; e quando diremo dato il punto o la linea, fa duopo intendere esserne conosciute le proiezioni rispettive.

In quanto alle superficie vedremo appresso come bisogna restringere l'uso delle proiezioni per agevolmente rappresentarle.

8. In tutto quanto precede abbiamo supposto farsi le proiezioni per mezzo di rette calate perpendicolarmente sul piano fisso. Pur è qualche volta vero adoperarvisi rette oblique, sempre imperò parallele ad una data direzione e vi han luogo bensì le conseguenze dedotte ne' numeri 5, 6, e 7. Ciò nullostante non senza forti cagioni si adotta questa specie di proiezione, perocchè è in generale meno semplice, e dà minore esattezza ne' risultamenti grafici per le rette che tagliandosi obbliquamente lasciano maggiore incertezza sulla posizione precisa

·unto d'incontro. Ciò posto, salvo che altrimenti non
no apertamente, le proiezioni saranno sempre orto-

migliantì cagioni si scelgono ordinariamente i piani di
VXY, XYZ perpendicolari tra loro, e perchè più
e vengano al pensiero si suppone il primo *orizzontale*,
erticale la cui intersecazione comune XY che è im-
a notare, si chiama *linea della terra* (1).

o dunque un metodo accomodato ad esprimere grafi-
i dati di un problema senz'alcuna indeterminazione;
regolarlo in guisa che le costruzioni possano tutte com-
›ra di un unico piano. Il perchè, proiettati i punti e
i che si tratta sopra i due piani rettangolari VXY, XYZ,
ıga che quest'ultimo aggirandosi intorno la linea della
si sopraapponga al piano orizzontale per formarvi un
edesimo piano VZ' sul quale vanno effettivamente ese-
te le costruzioni, le quali avrebbero dovuto farsi su'
e piani. Nondimeno non bisogna perder di vista che
mento del piano verticale non si adopera se non come
esecuzione; ed ogni volta che si voglia prender ragione
perazione con considerazioni geometriche, si deve col
rialzare il piano verticale, e figurarselo sempre per-
are all'orizzontale.

opo l'abbassamento del piano verticale esiste tra le due FIG. I.
ıi di uno stesso punto nello spazio una dipendenza im-
ssima a tenersi d'occhio. In fatti le due rette Aa, ed
proiettano il punto a in A ed in A' sono perpendico-
al piano orizzontale, l'altra al verticale, ondechè il pia-
condotto per esse sarà perpendicolare ai due piani di
ıe, e per conseguenza alla loro comune sezione XY,
il piano AaA' taglierà quelli secondo le rette AF, ed
pendicolari ad XY, e coincidenti con lo stesso punto

(1) ·uni autori italiani fra' quali lo Zanotti chiamano anche questa
nome di *linea fondamentale*, o *linea del piano*.

F della linea della terra. Ciò premesso, quando il piano verticale XYZ gira intorno ad XY, mena con esso la retta A'F la quale durante il movimento resta perpendicolare all'asse XY; per conseguenza, dopo l'abbassamento del piano verticale, la retta FA' prenderà una posizione FA'' che sarà evidentemente il prolungamento di FA. Per la qual cosa *le due proiezioni* A ed A'' *di uno stesso punto nello spazio devono sempre trovarsi sopra una stessa retta perpendicolare alla linea della terra* XY, quando i due piani di proiezione combaciano : se si prende ad arbitrio una di queste proiezioni, A per esempio, bisognerà condurre la retta indefinita AF perpendicolare ad XY, e situare in qualche punto del prolungamento di AF la seconda proiezione A''.

11. In quanto alla retta *ad*, se si abbassa parimente il punto D' in D'' la proiezione verticale di A'D' diverrà nell'abbassamento A''D''; pure non avrà essa colla proiezione orizzontale AD nessuna dipendenza necessaria, per la qual cosa si possono tracciare *arbitrariamente* le linee AD, ed A''D'' per rappresentare le due proiezioni di una stessa linea nello spazio. Se non che bisogna eccettuare solo il caso in cui AD fosse perpendicolare alla linea della terra XY; ed allora la proiezione verticale dovrebbe essere anche il prolungamento di AD ; ma noi abbiamo già detto (*n.* 6) che in questo caso particolare due proiezioni di tale natura lascerebbero indeterminata la posizione della retta.

12. Quind'innanzi situeremo i piani di proiezione combacianti in un solo, in modo che la linea della terra XY abbia la posizione indicata (*fig.*2); e poi che allora la parte VXY del foglio di disegno rappresenterà nello stesso tempo la parte anteriore del piano orizzontale, e la inferiore del verticale già tutt'uno colla prima, laddove l'altra XYZ comprenderà la superiore del piano verticale, e la posteriore dell'orizzontale, non sarà sufficiente per determinare graficamente un punto dello spazio darne indistintamente le due proiezioni A, ed A'. Bisognerà dire eziandio se il punto A sia la orizzontale, ovvero la proiezione verticale; per-

ciocchè l'una e l'altra d...
e producono grandissima ...
del punto nello spazio. ...
piano cui è relativa ...
ordinariamente con lettere ...
de' punti o delle rette, e ...
il punto (A, A') dinoterà ...
zontalmente in A e vertica...
che ha per proiezione or...
stessa cosa del punto (C...
fradditanto bene farà di ...
presentarsi le posizioni d...
avanti o indietro de' pian...
riconoscere con facilità ...
mati da questi due piani ...
proiezioni.

13. Le stesse convenzi...
chè la retta (AB, A'B') ...
orizzontale AB, e per ...
è poi determinata di p...
remo un modo generale d...
a dire i punti dove quest...
La *traccia verticale* d...
punto comune al piano ver...
tata orizzontalmente sulla ...
linea AB indefinitamente ...
ne orizzontale il punto C e ...
qualche sito della verticale ...
te sulla proiezione verticale ...
to C'. Da cui risulta questa r...
rendersi familiare l'applica...
rizzontale della retta fino ...
punto innalzate una vertica...
proiezione verticale darà la ...
posta.

e l'altra di queste ipotesi possono essere ammesse gran dissima differenza in quanto alla posizione reale llo s pazio. A fine dunque di significare alla vista il ela iva ciascuna proiezione, converremo di notare nte on lettere senz'accento le proiezioni *orizzontali* lelle rette, e con le accentate le *verticali*. Laonde , A' dinoterà il punto dello spazio proiettato oriz- in A e verticalmente in A' : il punto (B, B') quello roi zione orizzontale B e per verticale B', e sarà la del punto (C, C') o dell'altro (D, D'). Il lettore be e farà di esercitare la sua immaginazione a rap- le posizioni diverse di questi punti, sopra o sotto, iel o de' piani di proiezione per potere da ora innanzi co facilità in quale de' quattro angoli diedri for- sti due piani stia situato un punto dato,mercè le sue

FIG. II.

tesse convenzioni dovranno applicarsi alle linee; sic- (AB, A'B') sarà quella che ha per proiezione AB, e per verticale A'B' : ma atteso che una retta m nata di posizione, conosciuti due suoi punti, da- o generale di trovare le *tracce d'una retta*, cioè dove questa incontra i due piani di proiezione. *verticale* della retta (AB , A'B') essendo un e al piano verticale ed alla retta, deve essere proiet- almente sulla linea della terra XY, ed anche sulla in definitamente prolungata; sicchè avrà per proiezio- e il punto C e per conseguenza sarà allogata in della verticale CC': ma deve trovarsi evidentemen- zione verticale A'B' indefinita ; dunque è nel pun- i risulta questa regola generale della quale bisogna miliare l'applicazione, *prolungate la proiezione o- della retta fino alla linea della terra, da questo alzate una verticale indefinita, il suo incontro colla verticale darà la traccia verticale della retta pro-*

FIG. III.

La *traccia orizzontale* della medesima retta essendo un punto situato similmente sul piano orizzontale e sulla linea proposta, sarà proiettata verticalmente sulla linea della terra XY e sopra A'B' indefinita; dunque avrà per proiezione verticale il punto D' e sarà situata però in qualche punto della retta DD' perpendicolare alla linea della terra. Ma d'altra parte questa traccia deve necessariamente trovarsi sulla proiezione orizzontale AB indefinita, dunque essa è nel punto D. Quindi in generale *prolungate la proiezione verticale fino alla linea della terra, da questo punto innalzate ad essa una perpendicolare indefinita: il suo incontro colla proiezione orizzontale determinerà la traccia orizzontale della retta in quistione*(1).

14. Reciprocamente se fossero date le due tracce D e C' di una retta, sarebbe facile assegnarne le proiezioni; avvegnachè siccome il punto C' appartiene alla retta stessa, la perpendicolare C'C calata sulla linea della terra darà un punto C della proiezione orizzontale, la quale sarà chiaramente DC. Della stessa maniera il punto D che appartiene a questa retta proiettato verticalmente sulla linea della terra, darà un punto D' della proiezione verticale, che sarà D'C'.

È util consiglio esercitarsi a risolvere queste due quistioni una reciproca dell'altra, su rette diversamente situate, tali

---

(1) Sieno due proiezioni di una data retta espresse dalle equazioni $x=az+p$ (1) ed $y=bz+q$ (2); e sia $y=\frac{b}{a}x+q-\frac{bp}{a}$ (3) quella della terza dedotta. Per avere le tracce dimandate si faccia nella (1) e (2), $z=0$ e nella (2) e (3), $y=0$, sicchè otterremo $x=p$ ed $y=q$ per le coordinate del punto d'incontro della data retta col piano delle x e delle y, $z=-\frac{q}{b}$ ed $x=p-\frac{aq}{b}$ per quelle corrispondenti all'altro incontro col piano delle z e delle x, quindi resteran determinati tali punti. Si rifletta che le ascisse indicate dinotano i punti d'incontro delle proiezioni della data retta colla comune sezione de' piani di proiezione, e le ordinate corrispondenti determinano le tracce in quistione, collo imbattersi nelle proiezioni prolungate. Laonde derivano le regole grafiche del n. 13.

F ... ella *fig. 3*, la linea (EF, E'F') la cui traccia
è la verticale in G', e la linea (HK, H'K')
ra ... ccia verticale ed L la orizzontale.
... are queste nozioni preliminari stabiliremo al-
... ziali da osservare nel delineamento di tutte le
... he. Le quali dovendo coi fatti servire a rap-
... nente la forma delle cose, fa d'uopo che le
... di punteggiamento che vi si adoperano, offra-
... inguaggio parlante alla vista; cioè manifestino
... tuazione relativa delle varie parti, distinguen-
... o invisibili dalle visibili all'osservatore, e fa-
... ultamenti di un problema mediante le linee che
... me mezzo ausiliario per giugnervi: quindi
... ntemente le seguenti regole.
... incipali, cioè quelle che rappresentano i *dati*,
di un problema saranno segnate con un *tratto*
allorchè saranno *visibili;* e *punteggiate* se *in-*
... gnate con punti rotondi. Nelle linee ABCD,
3 bis) vedonsi esempî di queste due specie di

... iliarie, cioè tutte quelle che non sono compre-
... ecedente, adoperate siccome mezzi per giu-
... ne del problema, saranno *tratteggiate* ossia
li tratti interrotti; tale è la linea P *(fig. 3 bis)*.
i linee ausiliarie non avviene mai distinguere
... o, perciocchè si suppone star esse solamente
... ne del geometra, il quale le concepisce per
... mento dimandato.
alcuna di queste linee ausiliarie offrirà mag-
... meriterà speciale attenzione, potrà esser
una linea mista fatta di piccoli tratti separati
rotondi come nelle rette M ed N *(fig. 3 bis)*.
por mente di non moltiplicare troppo questa
... giamento, e consultare su ciò il buon giudizio
... i; nè bisogna poi adoperare mai queste linee

miste per segnare le rette che riuniscono semplicemente le due proiezioni di uno stesso punto.

16. Rimane adesso a chiarire come fra le linee *principali* di ogni quistione, si distinguono quelle che sono visibili, e che si devono delineare con tratto pieno, dalle invisibili che s'hanno a punteggiare. Su questo particolare non potranno darsi regole compiute se non dopo aver trattato delle superficie curve, e dei loro piani tangenti; ma dappoichè ne' primi problemi de' quali ci occuperemo non s'incontreranno che rette e piani, basterà per ora fermare queste convenzioni.

Si suppone sempre che l'osservatore il quale considera la proiezione d'un corpo sul piano *orizzontale*, sia situato *sopra di questo piano ad una distanza infinita sulla verticale* che passa per un punto qualunque di quello, ma innanzi al piano verticale; e questa convenzione che renderà semplice come vedremo più innanzi, il delineamento del contorno apparente delle superficie curve è stata per altro suggerita dalla maniera come si proiettano i punti dello spazio sopra di un piano. In fatto i raggi visuali condotti dall'occhio dell'osservatore a tutt'i punti di un corpo si approssimano tanto più a divenir perpendicolari al piano orizzontale quanto più l'osservatore s' innalza restando sulla medesima verticale; in maniera che quando il punto di veduta è ad una distanza infinita, questi raggi divengono paralleli, e coincidono colle rette che servono a proiettare i punti del corpo. Da ciò segue che *la proiezione orizzontale di un corpo è la* VEDUTA *di questo corpo presa da un punto infinitamente lontano sulla verticale;* il quale risultamento giustifica sufficientemente la convenzione sopra enunciata.

Per una ragione consimile supponiamo ogni proiezione *verticale* vedersi da un osservatore situato ad *una distanza infinita su di una perpendicolare al piano verticale elevata avanti di esso, e al di sopra dell'orizzontale.*

Secondo questo, ogni linea o parte di una linea *principale* che starà sotto il piano orizzontale o dietro il verticale, sarà

reputata invisibile, e co…
Se inoltre si abbia ne…
stente, e dietro o sotto…
parte di linea princip…
giata: ma bisognerà …
cernono le *linee ausiliari*…
Le applicazioni di quest…
fig. 3, ed avremo cura di…
blemi che prenderemo a…

CAP…

PROBLEMI SULL…

17. *Costruire la retta c… ed (M, M'); e trovare la…*

(*) Prima di mandare ad e… gole seguenti. Primieramente… di disegno si traccia una … sua lunghezza, quindi un'a… avvalendosi di archi circ… molta precisione per con… ghezza alquanto considere… condurre delle parallele con… le conviene a farla strisciare… deve tracciare in ogni disegno… le sue parallele o perpendic… dicolari, che abbiamo raccoz… formano ciò che i pratici chia… Soggiungiamo inoltre che… terra, bisogna evitare di form… principali; perciocchè ne risult… tazione de' punti, in cui sarebbe…

a invisibile, e come tale *punteggiata* con punti rotondi.
re si abbia nella quistione qualche piano realmente esi-
e dietro o sotto di esso per rispetto all'osservatore una
linea principale, questa dovrà essere anche *punteg-*
a bisognerà rammemorarsi che tali distinzioni non con-
e *linee ausiliarie* per la ragione citata al n. 15, 2.°
azioni di queste regole si potranno riconoscere nella
vremo cura di ricordarle nella maggior parte dei pro-
prenderemo a risolvere.

CAPITOLO II.

ROBLEMI SULLE LINEE RETTE ED I PIANI.

tire la retta che passa per due punti dati (A, A′) FIG. IV.
e trovare la vera distanza tra essi. (*)

mandare ad effetto un disegno è essenziale tenere le re-
Primieramente con la matita verso la metà del foglio
accia una retta indefinita presso a poco parallela alla
uindi un'altra esattamente perpendicolare alla prima,
rchi circolari; poichè la squadra non è istrumento di
per condurre perpendicolari, che devono aver lun-
considerevole. Nondimeno la squadra può servire a
rallele con artifizio esattissimo e speditissimo il qua-
'a strisciare lungo una riga fissa; col quale mezzo si
ogni disegno la linea della terra, e tutte le rette che
perpendicolari, dirigendosi sulle due rette perpen-
mo raccomandato di costruire in primo luogo, e che
ratici chiamano *linee in croce*.
ro oltre che per quanto sia importante la linea della
ir... e di formarla con un tratto più grosso delle linee
... è ne risulterebbe spesso molta inesattezza nella si-
...ui sarebbe incontrata dalle altre rette del disegno.

Secondo le definizioni date al *n. 4*, è evidente che la proiezione orizzontale della retta cercata passerà pe' punti A, ed M mentre la verticale passerà per A' ed M'; dunque questa retta indefinita è proiettata secondo AMB ed A'M'B', e perciò trovasi compiutamente determinata di posizione (*n. 6.*). Quindi si possono costruire le sue tracce (*n. 13.*) che saranno i punti (B, B') e (C, C').

La distanza poi de' due punti dati è misurata nello spazio dalla porzione della retta proiettata in AM ed A' M'; ma è facile osservare che una retta di data dimensione è sempre più lunga della sua proiezione su di un piano, eccetto quando fosse ad esso parallela; perciocchè allora la *retta nello spazio è evidentemente della stessa lunghezza della sua proiezione*. Dopo questa osservazione immaginiamo che la retta (AM, A'M') giri intorno della verticale proiettata in A, rispetto a cui non vada cangiando inclinazione; con ciò l'estremità (A, A') rimarrà immobile, laddove l'altra (M, M') si manterrà ad un'altezza costante, descrivendo solamente un arco di cerchio intorno l'asse di rotazione. Or continuando questo movimento fintanto che la retta movibile sia divenuta *parallela al piano verticale*, il che avverrà quando la proiezione AM avrà presa la situazione AP parallela alla linea della terra XY, allora l'estremità M pervenuta in P, sarà proiettata verticalmente (*n. 10*) in qualche punto della retta PIP' perpendicolare ad XY; e poi che deve trovarsi alla medesima altezza di M', se si conduce l'orizzontale HM'IP', il punto P' sarà la proiezione verticale dell'estremità movibile della cennata retta; e da un'altra parte, poi che l'altra estremità (A, A') è rimasta invariabile, ne segue che la retta (AM, A'M') è attualmente proiettata secondo AP, A'P'; e la sua vera lunghezza è precisamente la proiezione verticale A'P'; giusta l'osservazione fatta al principio di quest'articolo. Da ciò si deduce la regola seguente che bisogna rendersi familiarissima. *Per trovare la distanza di due*

IV. *punti* (A, A') *ed* (M, M'), *formate un triangolo rettangolo* A'HP' *di cui un lato* A'H *sia la differenza delle loro altezze* A'R,

dal piano orizzontale, e l'altro HP' uguale all'inter-
M delle due proiezioni orizzontali: l'ipotenusa A'P'
distanza domandata.

Si giugnerebbe allo stesso scopo costruendo sul piano
ale un triangolo rettangolo del quale un cateto ugua-
la differenza delle distanze AR ed MK de' due punti
piano verticale, e l'altro l'intervallo A'M' delle due
oni verticali; l'ipotenusa esprimerebbe parimenti la
de' due punti nello spazio, e dovrebbe trovarsi identi-
A'P'. Per rendersi ragione di questa nuova costruzione,
iamo al lettore la cura d'eseguire, basterà immaginare
etta proposta abbia girato intorno la orizzontale ch'è
ta verticalmente in A', senza cambiare d'inclinazione ri-
quest'ultima, fintantochè sia divenuta parallela al pia-
zontale.

vremmo potuto ancora abbassare la retta (AM, A'M')
o orizzontale, facendo girare intorno di A M il trape-
riabile formato dalla retta proposta, e dalle verticali
roiettano gli estremi in A ed in M. Con ciò queste due
rebbero rimaste perpendicolari all'asse di rotazione
avrebbero prese le posizioni AA''=RA', MM''=KM';
che tracciando la retta A''M'' si sarebbe ottenuta anco-
a distanza de' due punti (A, A') ed (M, M'). Oltrac-
esenta qui l'opportunità di fare una di quelle prove,
bisogna negligere nelle operazioni grafiche; ed è che
A''M'' prolungata deve andare a terminare in B, poi-
to punto essendo la traccia orizzontale della retta pri-
vavasi situato sull'asse AMB, epperò ha dovuto resta-
bile durante la rivoluzione della retta (1).

---

costruzioni grafiche delle quali si fa cenno ne' numeri 17,
on sono, che quelle geometriche dell' espressione analitica
$x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2$ la quale dinota la distan-
punti nello spazio. Infatti questa formola si costruisce coll'i-

20. *Reciprocamente, se fosse data la retta indefinita* (AB, A'B') *ed uno de' suoi punti* (A, A') *e si volesse trovare su questa linea un altro punto* (M,M') *che fosse lontano dal primo di una quantità* δ, si abbasserebbe come precedentemente la retta proposta sul piano orizzontale, e farebbesi AA''= RA', e si condurrebbe A''B. In seguito preso su quest'ultima linea un intervallo A''M''=δ; poi rialzando la retta abbassata A''B, il punto M'' si riporterebbe in M con una perpendicolare sull'asse di rotazione AB; e da ultimo dalla proiezione orizzontale M si dedurrebbe (*n. 10*) l'altra M', ciocchè determinerebbe compiutamente il punto dimandato.

G. V. 21. *Per un punto dato* (D,D') *condurre una retta che sia parallela ad una retta conosciuta* (A B, A'B').

Quando due rette nello spazio son parallele, i piani che le proiettano sono evidentemente paralleli tra loro e per conseguenza anche le loro intersecazioni col piano di proiezione; cioè a dire le proiezioni delle rette saranno necessariamente parallele l'una all'altra. Viceversa, allorchè le proiezioni orizzontali di due rette sono parallele, e lo sono del pari le verticali, i quattro piani proiettanti sono paralleli a due a due; da cui segue che le loro intersecazioni scambievoli, cioè le rette nello spazio sono parallele fra loro. Dopo tali premesse, se dal punto D si conduce una parallela DE ad AB, e pel punto D' un'altra D'E' ad A'B', la retta dimandata avrà per proiezioni DE e D'E', ed in tal modo sarà però compiutamente determinata, ed inoltre le sue tracce che saranno in F ed in E' si costruiranno come si è detto al (*n. 13*).

G. VI. 22. *Costruire il piano che passa pe' tre punti dati* (A,A') (B,B'), (C, C').

---

potenusa di un triangolo rettangolo, che ha i suoi cateti, uno eguale alla radice della somma de' due quadrati segnati sotto il segno radicale, e l'altro pari alla radice del terzo quadrato; espressioni algebriche equivalenti, una *alla proiezione della distanza de' due punti dati sopra uno de' piani fissi, l'altra alla differenza delle perpendicolari, che proiettano questi punti sullo stesso piano.*

viamo in primo luogo che per determinare graficamente izione di un piano è sufficiente averne le *due tracce*, cioè intersecazioni co' piani di proiezione. Le quali dovranno e tagliare la linea della terra nello stesso punto; come- angolo che fanno tra loro sul piano di proiezione ab- o non sia uguale a quello che comprendono nello spazio. e è ben chiaro, che quando una retta è situata in un pia- sue tracce (n. 13) devono essere situate in qualche delle tracce del piano. Ciò premesso, si congiungano i dati a due a due con le rette (AB, $A'B'$), (BC, $B'C'$), $A'C'$) ciascuna delle quali avendo due punti nel piano o vi saranno contenute interamente; e se ne costruiscano me al (n. 18) le tracce verticali E', F', e G'. Allora que- punti che devono evidentemente appartenere all'interse- e del piano incognito col piano verticale di proiezione sa- necessariamente in linea retta, e varranno a determi- a traccia verticale $E'F'G'$ del piano dimandato. Pari- la traccia orizzontale DHK si otterrà costruendo le trac- zontali D, H, e K delle tre rette ausiliarie; inoltre le nee $E'G'$, e DH così ottenute dovranno incontrar la li- ella terra XY in uno stesso punto Q, ciocchè offrirà ıova pruova delle costruzioni anteriori.

i volesse far passare un piano per una retta ed un punto congiungerebbe questo con un punto qualunque di quella, le si menerebbe una parallela pel punto dato; sicchè si crebbero due rette situate nel piano cercato, le cui trac- tano a determinare quelle del piano (1).

---

(1) na superficie piana si può considerare come il luogo geome- i una retta, la quale mantenendosi parallela ad una direzione ta scorra su di un'altra data di posizione. Le proiezioni della e sieno $y=az+p$ (1) ed $x=bz+q$ (2) e quelle della generatrice $+p'$ (3) $x=b'z+q'$ (4) in cui a' e b' son determinate dalla qui- liminando fra queste equazioni x, y, z si ha quella di con- $\frac{p'-p}{a-a'}=\frac{q'-q}{b-b'}$ (5) nella quale sostituiti i valori di p' e q'

§. VII. 23. *Per un punto dato* (A,A′) *condurre un piano che sia parallelo ad un altro, la cui traccia orizzontale è* ST, *e la verticale* TV′.

È evidente che due piani paralleli devono avere le loro tracce rispettivamente parallele, talchè basterà trovare un punto di ciascuna traccia del piano dimandato. A tal uopo immaginiamo pel punto dato (A, A′) *una orizzontale* che sia situata nel piano incognito; il che è sempre possibile, poichè basta condurre questa retta ausiliaria parallelamente alla traccia orizzontale dello stesso piano, ovvero ad ST. Se dunque si meni in questa direzione la retta AB, e si conduca A′B′ parallela alla linea della terra, saranno queste evidentemente le due proiezioni della orizzontale, che giace sul piano incognito. Ciò posto: fatta la costruzione (*n. 13*), il punto B′ in cui quella incontra il piano verticale apparterrà necessariamente alla traccia del piano cercato, la quale sarà per conseguenza la retta B′Q parallela a V′T; e l'altra dovendo passare per il punto Q sarà la PQ parallela a TS.

Per verificare le operazioni fatte si può anche aver direttamente un punto della traccia orizzontale del piano incognito.

---

tratti dalla (3) e del la (4) si otterrà $y(b-b')+x(a'-a)+z(ab'-a'b)+p(b'-b)+q(a-a')=0$ equazione del piano; che suol ridursi sotto la forma $Ax+By+Cz+D=0$ e combinando una delle tre equazioni $x=0$, $y=0$, e $z=0$ con la precedente si avranno le tracce del piano su'piani coordinati, e però le equazioni $x=0$ e $By+Cz+D=0$ determineranno la traccia sul piano delle y e delle z, parimente si procederà per le altre. Per ottenere poi il punto in cui il piano incontra gli assi coordinati, quello per esempio delle x, fa mestieri che abbiano luogo le tre equazioni simultanee $z=0$, $y=0$ ed $x=-\frac{D}{A}$, e così per ogni altro. Riflettendo non pertanto che le rette contenute in un piano hanno le loro tracce in quelle del piano, e le proiezioni delle perpendicolari a qualsiasi superficie piana son perpendicolari alle sue tracce, tutte le quistioni relative a' piani ed alle linee rette si riducono a trovare le tracce di alcuni piani o di alcune rette, derivanti da'dati del problema; per lo che non si richiedono che operazioni grafiche di facil'opera.

gotto s'immaginerà in questo piano, e pel punto (A, A')
a ausiliaria parallela al piano verticale; la quale
entemente per proiezioni AC parallela alla linea della
A'C'a V'T. Se dunque si cerca (n. 13) il punto C in cui
ta ausiliaria penetra il piano orizzontale, questo punto
necessariamente alla traccia del piano dimandato;
luopo che la retta PQ già costruita passi pel punto C.
rviamo che nella presente costruzione non si sono
due piani STV', e PQR' come realmente esisten-
questo caso il primo avrebbe reso invisibile l'al-
be stato mestieri (n. 15. 1:°) punteggiare total-
ce di quest'ultimo, ciocchè avrebbe soverchia-
icati i punti rotondi, ed avuto sopratutto il gran-
te di non lasciare più discernere le parti delle
al di qua dei piani di proiezione, da quelle che
erciò si suppone qui come se si trattasse di tro-
le tracce di un piano parallelo a quello che
ST, e TV', senza costruire col fatto nes-
cee ... Questa restrizione, il cui scopo è di portare
mi.
zza ne'disegni, è stata anche ammessa nelle co-
e (8, 9, e 16).

razioni che hanno avuto luogo ne'n. (22, e 23) FIG. VI.
 sciogliere la quistione seguente. Data la pro-
ne AB di una retta la quale si sappia giacere
ato PQR', trovare l'altra. La retta incognita
verticale in un punto che dev'essere proiet-
te in E (n. 13). Inoltre questa traccia, non
ri della traccia verticale QR' del piano con-
, verrà necessariamente situata in E', e sarà
iezione voluta. In seguito dietro simili con-
e, che la retta in quistione va ad incontrare
in D; dunque se si proietta D in D' sulla
, D'E' sarà la proiezione verticale della
si concepisce che sarebbe del pari facile
DE ritenendo come dati solamente la ver-
o che contiene la retta.

G. VII.

Se la proiezione AB assegnata sul piano orizzontale fosse come nella *fig. 7.* parallela alla traccia PQ del piano dato, si otterrebbe in prima, come si è detto, la traccia verticale B′ della retta incognita, ma poi non avendone più la orizzontale, poichè AB non incontra punto PQ, farebbe mestieri conchiudere che la linea richiesta è parallela al piano orizzontale, e perciò la sua proiezione verticale è la retta B′A′ parallela alla linea della terra XY.

Si vedrà parimenti che se la proiezione orizzontale data è la linea AC parallela ad XY, la retta nello spazio è parallela al piano verticale, e la sua proiezione su questo è la C′A′ parallela alla traccia QR′.

. VI.

26. Ed ecco ancora una questione analoga: *conoscendo la proiezione orizzontale A di un punto situato sopra di un piano dato* PQR′, *trovare l'altra.* Si condurrà pel punto dato A una retta qualunque DAE che si considererà siccome la proiezione orizzontale di una linea situata nel piano PQR′; sarà facile di costruirne come sopra la proiezione verticale D′E′, nè avremo allora che a riportare il punto A in A′ su detta proiezione, per mezzo di una perpendicolare alla linea della terra (*n. 10*): con pari facilità troverebbesi la proiezione A conoscendo A′. Fra le diverse direzioni che posson darsi alla retta ausiliaria DAE, la migliore ordinariamente è una parallela alla traccia orizzontale PQ come la linea AB nella *fig. 7*.

27. *Trovare l'intersecazione di due piani che avrebbero per tracce uno* PQ, *e* QR′; *e l'altro* ST, *e* TV′.

VIII.

Se si prolungano le due tracce orizzontali fintanto che si tagliano in B, questo punto evidentemente comune ai due piani apparterrà alla loro intersecazione, e poichè giace sul piano orizzontale, sarà la traccia orizzontale della retta cercata; parimente il punto A′ in cui si taglieranno le tracce verticali dei piani, ne sarà la verticale. Per la qual cosa conoscendo le due tracce della comune sezione se ne dedurranno immediatamente (*n. 14*) le proiezioni che saranno AB ed A′B′.

28. Se due delle tracce son parallele come avviene pe' piani

e V'T S, il punto B si allontanerebbe indefinitamente
nseguenza l'intersecazione de' due piani diverrebbe una
le avente per proiezione A'b' parallela alla linea della
d Ab parallela a TS : il quale risultamento era facile
e; percioc chè i piani dati passando allora per due rette
Q p, e TS non possono tagliarsi che secondo una retta parallela.

ando le tracce sopra i due piani di proiezione saranno mente parallele, i piani dati lo saranno ancora evite, nè vi sarebbe poi intersecazione, salvo che quelle nello stesso tempo parallele alla linea della terra co- P'Q' per uno de' piani, TS, e T'S' per l'altro: per- ue piani così situati possono anche tagliarsi secondo parallela ad XY, ma il metodo precedente non basta nerne la intersecazione. FIG. IX.

caso si conduca a volontà un piano secante ausilia- sso tag lierà il piano [PQ, P'Q'] secondo la retta che si costruisce col metodo generale, ed il piano secondo l'altra (EF, E'F'); allora queste somministreranno col loro incontro un punto (M, à evidentemente comune ai due piani [PQ,P'Q'], e per conseguenza avranno per intersecazione la A'M-B') condotta parallelamente ad XY.

e ancora adoperare qui un *piano di profilo* con- licolarmente ad XY; il quale taglierebbe i piani primitivi secondo le due rette XV ed XZ, l'ulti- prenderà evidentemente la posizione XZ'' quando profilo sul piano orizzontale, facendolo girare in- posto: il piano di profilo incontra le tracce ver- proposti ne' punti P' e T' che divengono coll' ab- ', e T''; dunque PP'' e TT'' sono le tracce di l profilo abbassato secondo Z''XV; e siccome in A'', è questo un punto dell'intersecazione do- le avrà evidentemente per proiezione orizzontale rallela ad XY. Inoltre se si rialza il profilo, il

punto A'' si proietterà verticalmente in A', ed A'B' parallela ad XY sarà la seconda proiezione dell'intersecazione de'piani proposti.

Se le tracce de' piani senz'essere parallele tra loro passano tutte quattro per lo stesso punto della linea della terra, bisognerebbe ricorrere nuovamente ad uno de' piani ausiliari che abbiamo adoperato; e consigliamo poi il lettore a costruire il disegno relativo a questi casi particolari.

G. X. 30. *Costruire il punto d' intersecazione di una retta,* (AB, A'B') *con un piano dato* PQR'.

Per giugnervi fa mestieri condurre per la retta data, in una direzione qualunque, un piano secante, e segnarne la intersecazione col piano PQR', la quale poichè passerà necessariamente pel punto cercato, lo determinerà mercè il suo incontro colla retta data.

Sulle prime adottiamo per piano secante il verticale e che proietta la retta data secondo A B : sarà questa la traccia orizzontale del piano, e la verticale sarà la perpendicolare CC' sulla linea della terra. Ciò fatto, il piano ACC' taglia il dato PQR' secondo una retta proiettata (*n. 27*) in C'D', e CD ; e siccome siffatta intersecazione incontra la retta data (A'B', AB) in M', sarà questa la proiezione verticale del punto dimandato. La seconda non è somministrata immediatamente, posciachè qui tutte e due le rette che combiniamo sono proiettate secondo ADBC ; ma si dedurrà da M' calando (*n. 10*) la perpendicolare M'M sulla linea della terra. Laonde il punto (M, M') è quello in cui la retta (AB, A'B') incontra il piano PQR'.

Si può anche adottare per piano secante quello proiettante la retta sul piano verticale, il quale avrà per tracce A'B', e B' F perpendicolare ad XY. Questo piano taglierà PQR' secondo la retta (FG, B'G') che incontrandosi con AB dovrà dare lo stesso punto M già ottenuto con la prima costruzione; epperò i due metodi adoperati simultaneamente serviranno altresì di prova scambievole.

Osserviamo qui che ... *principale* (*n. 15*) ch... la porzione della retta ... punto di sezione; sicchè ... *giata.* Il prolungamento ... *ausiliaria* relativa al pian...

31. Quantunque i due ... spediti sarà ben fatto p... de' piani colle rette di ... di un piano secante qu... piano dovrà compren... sono B, e C', è mest... del piano secante che ... B la retta arbitraria SBT ... saranno queste le tracce ... linea (AB, A'B'). Ciò ... (*n. 27*) secondo la lin... contra (AB, A'B') in ... data incontra il piano P... verificare le costruzioni, ... suddette due proiezioni ... alla linea della terra.

32. *Per un punto dato ... due altre date di posizio...*

Indicheremo solament... proponiamo al lettore ... todi precedenti. Pel pun... ri un piano, poi se ne ... to e la seconda retta, e c... otterrà una retta la quale ... zioni enunciate.

Si può ancora impiega... rati, cercar poscia (*n.* ... retta; sicchè congiunge... terra una retta che risol...

viamo qui che il piano dato PQR′ è una grandezza
ile (n. 15) che esiste realmente, e rende invisibile
one della retta (AB, A′B′) situata al di sotto del
sezione; sicchè la parte (MB, M′B′) è stata punteg-
prolungamento BC è poi considerato come una linea
e relativa al piano secante che serve alla soluzione.
antunque i due metodi adoperati (n. 30) sieno i più
arà ben fatto per esercitarsi sulle diverse combinazioni
olle rette di risolvere lo stesso problema, avvalendosi
o secante qualunque: pur tuttavolta siccome questo
à comprendere la retta data (AB, A′B′) le cui tracce
C′, è mestieri far passare per questi punti le tracce FIG. 11.
ecante che si adotterà. Si conduca dunque pel punto
arbitraria SBT, e pe' punti T e C′ la retta C′TV′;
ste le tracce di un piano ausiliario che conterrà la
A′B′). Ciò posto i piani STV′, e PQR′ si tagliano
ndo la linea (SV, SV′), la quale dappoichè in-
A′B′) in (M, M′) è questo il punto in cui la retta
il piano PQR′: ma bisognerà assicurarsi, per
costruzioni, che la retta MM′ la quale riunisce le
proiezioni è esattamente perpendicolare (n. 10)
a terra.

punto dato condurre una retta, che ne incontri
di posizione.

so lamente la soluzione di questo problema che
lettore per esercizio a fine di addestrarsi a'me-
. Pel punto dato e per la prima retta si condur-
oi se ne farà passare un altro per lo stesso pun-
retta, e cercando la comune sezione di essi si
a la quale soddisferà evidentemente alle condi-

impiegare solamente il primo de' piani mento-
s cia (n. 30) il punto in cui taglia la seconda
giungendo quest'ultimo punto col dato, si ot-
he risolverà il problema.

In generale vi sarà una sola soluzione, a meno che le due rette proposte non si trovino sullo stesso piano col punto dato.

XII. 33. Teorema. *Quando una retta (AB, A'B') è perpendicolare al piano PQR', le sue proiezioni sono rispettivamente perpendicolari alle tracce del piano.*

In fatti, il piano che proietta la retta secondo AB è per la sua definizione perpendicolare all' orizzontale : lo è ancora al piano dato PQR', poichè passa per una retta la quale per ipotesi è ad esso perpendicolare ; dunque il suddetto piano proiettante è perpendicolare sì all'uno che all'altro de'mentovati due piani, e per conseguenza alla loro comune intersecazione, che è la traccia orizzontale PQ ; la quale perciò sarà essa stessa perpendicolare alla proiezione AB, che giace nel piano proiettante. Si dimostrerebbe in simil guisa che la traccia verticale R'Q è perpendicolare alla proiezione A'B'.

Reciprocamente, *se le due proiezioni* AB, *ed* A'B' *di una retta sono rispettivamente perpendicolari alle tracce* PQ, *e* QR' *di un piano, questo e quella sono perpendicolari fra essi.*

In fatti il piano proiettante che ha per traccia AB è evidentemente perpendicolare alla retta PQ, epperò al piano PQR' che la contiene : egualmente il piano proiettante che ha per traccia A'B' è perpendicolare alla retta QR', e perciò al piano PQR'; dunque essendo questo perpendicolare ai due piani proiettanti, lo sarà ancora alla lor comune sezione, la quale è appunto la retta data nello spazio.

34. Osserviamo frattanto che questo teorema non avrebbe luogo se si trattasse di proiezioni *obblique* (*n. 8.*); nè bisogna credere inoltre che una relazione simigliante esista fra due rette perpendicolari tra loro ; perocchè le rispettive proiezioni ortogonali sullo stesso piano non formeranno un angolo retto ; eccetto se una delle linee proposte non sia parallela al piano di proiezione.

XII. 35. *Trovare la più corta distanza di un punto (A, A') da un piano dato PQR'.*

Si abbasserà primieramente dal punto (A, A') una perpen-

re indefinita sul piano, conducendo (*n. 33*) le proiezio- AB, ed A'B rispettivamente perpendicolari sulle tracce e QR'; poi si cercherà il punto (M, M') in cui questa incontra il piano, ciocchè si eseguirà come al *n. 30*. i agionamenti si applicano alla figura attuale, alla quale no per altro conservato le stesse notazioni. Allora AM, M saranno evidentemente le proiezioni della più corta di- dimandata, e la sua grandezza assoluta si otterrà (*n. 17*) cendo l'orizzontale IIM'M'' eguale ad AM, e tirando a A'M'' che sarà la distanza del punto dal piano.

Trovare la più corta distanza di un punto (C, C') *da* FIG. XIII. *etta data* (AB, A'B').

ducasi primieramente pel punto (C, C') un piano per- *olare alla retta proposta*; le sue tracce saranno per- olari (*n. 33*) alle proiezioni AB, ed A'B'; e per de- are uno de' loro punti, immagineremo in questo piano una *ntale* che parta da (C, C'). La quale, necessariamen- llela alla traccia orizzontale cercata, avrà per proiezio- *perpendicolare* ad AB, e C'D' parallela ad XY; e incontrerà il piano verticale in (D, D'). Se dunque *ucano* D'Q perpendicolare sopra A'B', e QP sopra AB, queste le tracce del piano cercato. Ciò posto costruendo) *il punto* (M, M') in cui questo piano incontra la ret- 3, A'B') e congiungendolo con (C, C') la linea (CM, *sarà* evidentemente contenuta nel piano D'QP, e come scirà perpendicolare ad (AB, A'B'); perlochè misu- più corta distanza dimandata, la cui grandezza assolu- si dedurrà dalle proiezioni CM e C'M' giusta la rego- rale esposta (*n. 17*).

esto disegno il piano D'QP non è nè uno de' dati, nè un ento del problema primitivo, ma solamente un mezzo enire alla soluzione cercata, sicchè farà d'uopo delinear- ecc con le linee *ausiliarie* (*n. 25*): la stessa osserva- pplica alla figura 14, della quale ecco la spiegazione. FIG. XIV.

ltra soluzione: Facciamo passare un piano pel punto

(C,C') e per la retta data (AB , A'B') ; basta congiungere (C , C') con (A , A') e cercare le tracce verticali delle due rette (AB , A'B') ed (AC , A'C') : allora B'D'Q , e QA saranno le tracce del piano ausiliario del quale testè cennammo. Ciò premesso : abbassiamo questo piano , facendolo girare intorno la sua traccia orizzontale AQ , e supponiamo che sien trasportati seco la retta ed il punto dato. In questo movimento di rivoluzione il punto (B,B') non uscirà dal piano verticale BF perpendicolare all'asse di rotazione AQ; per altro la distanza B'Q da questo punto a quello fisso Q , resterà invariabile ; per conseguenza se col raggio QB' si descrive un arco di cerchio che taglia BF in B'' , questo punto sarà l'abbassamento di (B , B') e la retta proposta del pari che la traccia QB' saranno abbassate secondo AB'' e QB''. Nello stesso modo menando le perpendicolari DD'' e CC'' sull'asse di rotazione AQ , la linea (ACD , A'C'D') si abbasserà secondo AD'' , ed il punto C verrà in C''. Allora nel piano orizzontale, cui tutt'i punti sono finalmente riferiti senzachè abbiano mutato di posizione , potrem noi calare sopra AB'' la perpendicolare C''M'' , la quale sarà *la vera lunghezza* della più breve distanza cercata. È questo comunemente il solo risultamento importante ; nondimeno se si voglia anche fissare la posizione della più breve distanza , non dobbiamo che rialzare tutto il sistema : il punto M'' si riporterà in M con una perpendicolare alla retta AQ , e la proiezione verticale M' si dedurrà come nel *n. 10*; in modochè finalmente la distanza in quistione sarà proiettata sopra CM, e C'M'.

38. Questa maniera di soluzione sarebbe utile sopratutto se si avesse voluto *cercare sulla retta* (AB , A'B') *un punto che fosse distante da* (C , C') *di una quantità data* δ. Imperocchè abbassati come sopra, la retta ed il punto dato secondo AB'' e C'', si descriverebbe con un raggio $C''N'' = \delta$ un arco di cerchio che taglierebbe AB'' in N'' e questo sarebbe il punto richiesto abbassato sul piano : poscia rialzando tutto il sistema intorno all'asse di rotazione AQ, il punto N'' si riporterebbe in N, il quale avrebbe per proiezioni N, ed N'. Si comprende bene

à generalmente una seconda soluzione, poichè l'arco con il raggio ∂ taglierà ordinariamente la retta AB″ nti N″ ed n″.

ovare gli angoli che un piano dato PQR′ fa co' due di ne. FIG. XV.

che per misurare l' inclinazione di due piani, basta iare da un terzo che sia perpendicolare alla loro comu- e, e le due rette tracciate da questo piano secante for- angolo che esprime l' inclinazione cercata. Dopo ciò, il piano PQR′, e l'orizzontale con un piano perpen- alla traccia PQ. Questo piano secante, che sarà ver- vrà per tracce la linea AD perpendicolare a PQ, e le DD′: per conseguenza taglierà il piano dato secon- tta la quale riunirebbe nello spazio il punto A con D′, e 'ipotenusa di un triangolo rettangolo avente per cateti)′. Se dunque si fa girare questo triangolo intorno di abbassarlo sul piano verticale, esso diverrà D′A″D, e ndicato con queste lettere misurerà l'inclinazione del R′ sull'orizzontale. Per ottenere quella che fa col ver- i taglierà con un piano CDB′ perpendicolare alla trac- ale QR′, e con ciò si otterrà un triangolo rettangolo i sono CD e DB′; perlochè questo triangolo abbassato CD, diverrà DB″C, nel quale l'angolo B″ esprimerà one dimandata (*).

r un punto dato condurre un piano che faccia un an- ! piano orizzontale, ed un altro ε col verticale. FIG. XV.

amo dapprima che nel problema precedente i due pia-

rte arti un piano spesso si definisce col darne la sua traccia PQ e la inclinazione α sul piano orizzontale. Con questi da- facile di trovarne la traccia verticale per mezzo del piano AD perpendicolare a PQ, che contiene l'angolo α, percioc- ndo AD secondo A″D, e formando l'angolo DA″D′=α)′ prolungato anderá a tagliare la verticale DD′ nel pun- iale bisogna condurre la traccia QD′R. Qualche volta si e-

ni secanti D'DA e B'DC dovevano tagliarsi fra loro secondo una retta perpendicolare al piano PQR', che misurava la più corta distanza di questo piano al punto D della linea della terra. Oltracciò, siccome questa perpendicolare abbassata successivamente co'due triangoli è evidentemente rappresentata dalle rette DF, e Df condotte ad angolo retto sulle ipotenuse, ne segue, che qualunque sia il piano PQR', deve aversi la relazione DF=Df. Ciò posto, se noi senza conoscere il piano PQR' che supporremo avere su i piani fissi le inclinazioni α e ζ, facciamo a volontà sulla linea della terra un triangolo rettangolo D'DA'' nel quale l'angolo A'' sia eguale ad α; poscia colla perpendicolare DF descriviamo un arco di cerchio, cui si conduca una tangente (*) B''fC che faccia l'angolo B'' eguale a ζ; questa tangente incontrandosi col prolungamento della verticale D'D determinerà un punto C della traccia del piano PQR'. Allora tirando la retta CQ tangente all'arco di cerchio descritto col raggio DA'', poi congiugendo i punti Q, e D' si otterranno le tracce di un piano CQD' che avrà su i piani trascelti le inclinazioni α e ζ, nè rimarrà per risolvere il problema primitivo, che condurre pel punto dato un piano parallelo a CQD' (*n. 23*)

FIG. XVI. 41. *Costruire l'angolo compreso fra due piani dati* PQR', e PSR'.

Fa mestieri come abbiam detto precedentemente far tagliare questi due piani da un terzo che sia perpendicolare alla lo-

---

vita ancora di adoperare il piano verticale di proiezione, e si abbassa il profilo intorno di AD formando l'angolo DA$\delta = \alpha$, ciocchè rappresenta di una maniera sufficientemente chiara la posizione del piano proposto e permette dedurne quelle conseguenze onde si abbisogna. In fine il piano di profilo fa le veci di un piano verticale di proiezione.

(*) Poichè è evidente che l'angolo CDf = B'' = ζ in vece di condurre questa tangente si potrà costruire il triangolo rettangolo CDf sulla base DF, poi rapportarne la sua ipotenusa da D in C sul prolungamento della verticale D' D.

e sezione. Or questa retta proiettata (*n.* 27) secondo
R' è l' ipotenusa di un triangolo rettangolo, che ha
i PR, ed RR', e che abbassato sul piano orizzontale
'RR''. Se dunque per un punto arbitrario A'' di detta
si conduce ad essa una perpendicolare A''B, e quindi
il triangolo R''RP nella situazione verticale PR, è
allora la linea A''B trovarsi nel piano secante che si
urre perpendicolarmente alla comune sezione per que-
A''; poi, siccome A''B anderà ad incontrare il piano
in B; la retta CBD, perpendicolare alla proiezione
(*n.* 33) la traccia orizzontale di questo piano secante.
chiaro, taglierà i proposti secondo due rette prodotte
A'' rialzato, le quali terminando in C ed in D forme-
riangolo, la cui base sarà CD, e l'angolo al vertice A''
cato; sicchè non avremo che a costruire questo trian-
sua *altezza* è precisamente A''B, poichè rialzata
, vedesi nel piano verticale RP perpendicolare sulla
noltre se si abbassa questo triangolo facendolo girare
etta CD il vertice A'' non uscirà dal piano verticale
licolare a questa retta: dunque portando su PR la
= BA'', si otterrà il triangolo dimandato CAD, e
otato dalle stesse lettere misurerà l'inclinazione de'
, e PSR'.

e potuto abbassare sul *piano verticale* l' interseca-
piani proposti; la quale sarebbe stata rappresentata
conducendole una perpendicolare A'B', il cui piede
essere riportato in B, se ne sarebbe fatto l'uso di
o.

hè i piani proposti hanno le tracce parallele sopra FIG. XVII.
ie piani di proiezione come R'QP, ed R'ST, la
ecedente esige un leggiero cambiamento che rende
nplice la risoluzione; poichè si sa (*n.* 28) che la
ue è allora la retta orizzontale (R'V', RV) pa-
ıcce orizzontali. Per la qual cosa se si conduca un
CRR' perpendicolare a questa comune sezione,

esso taglierà i piani proposti secondo due rette che formeranno con CD un triangolo, il quale avrà per vertice il punto R′ e per altezza la verticale R′R: in modo che abbassato questo triangolo sul piano orizzontale, facendolo girare intorno la base CD, il vertice R′ perverrà in R″, e l'angolo CR″D sarà la misura dell'inclinazione de' piani proposti.

Finalmente se le tracce fossero tutte parallele alla linea della terra come nella *fig. 9.* si farebbero tagliare i piani dati dal *piano di profilo* ZXV già adoperato (*n. 29*) e coll'abbassamento di cui ci siamo serviti in questo numero si otterrebbe l'angolo PA″T inclinazione de' piani in quistione.

FIG. XVIII. 43. *Trovare l'angolo di due rette date* (AB, A′B′) e (BC, $b'c'$).

Per l'angolo formato da due rette le quali forse non s'incontrano, fa d'uopo intender quello che comprenderebbero tra loro due rette condotte da uno stesso punto rispettivamente parallele alle prime: cominciamo dunque dallo esaminare se le linee proposte si tagliano. Or se queste hanno un punto comune, dovrà essere proiettato orizzontalmente in B e verticalmente in b' quali punti perchè fossero le proiezioni dello stesso punto nello spazio farebbe d'uopo (*n. 10*) che la retta Bb' fosse perpendicolare alla linea della terra, condizione che qui non ha luogo; per conseguenza le rette proposte non s'incontrano. In questo caso meniamo una parallela alla linea (BC, $b'c'$) per un punto qualunque dell'altra retta, e per ispeditezza scegliamo il punto che è proiettato in B, B′. Questa parallela avrà perciò per proiezione orizzontale la retta BC già data e per quella verticale la linea B′C′ parallela a $b'c'$ in guisa che il problema si riduce a trovare l'angolo formato dalle due rette (AB, A′B′) e (BC, B′C′) che riguarderemo come principali dati della quistione.

Costruendo le tracce orizzontali A e C di queste rette la AC che le congiunge sarà la base di un triangolo il cui vertice è il punto (B, B′) in cui si tagliano le rette proposte, e l'angolo al vertice sarà quello che si cerca. Ora l'altezza di questo triangolo è evidentemente l'ipotenusa di un triangolo rettangolo che

r base la perpendicolare BH abbassata sopra AC, e
la verticale che proietta il suo vertice in B, la quale
B'K, talchè se si prenda KH'' = BH e si conduca
ı questa l'altezza del triangolo primitivo. Il quale se
sul piano orizzontale, facendolo girare intorno la sua
l vertice non uscirà dal piano verticale HB perpen-
:otal base; dunque portando l'altezza B'H'' da H in
ıgolo cercato sarà ripiegato secondo AB''C, e l'an-
tesse lettere sarà quello che formavano nello spazio
(AB, A'B') e (BC, B'C').
ıdo una di queste rette, per esempio la seconda sarà
piano orizzontale, il triangolo, onde abbiam fatto
isterà più, ma la traccia orizzontale del piano delle
oposte, che nel caso generale era AC, diverrà in
una parallela a BC, in modo che abbassando come
o di sopra, questo piano facendolo girare intorno
:cia, si otterrà eziandio l'angolo dimandato.
aremo menzione del caso in cui le rette fossero en-
ıllele al piano orizzontale, poichè l'angolo che for-
nello spazio è uguale a quello che comprendereb-
proiezioni.
te se nel caso generale fosse proposto di dividere
eguali l'angolo formato da due rette che si tagliano,
irebbe la divisione dopo averlo abbassato sul piano
e rialzati poi l'angolo e la retta che lo divide si osser-
il punto, in cui quest'ultima retta taglia la traccia
el piano delle rette date, dimora immobile durante il
li rotazione prodotto dall'abbassamento cennato. Noi
al lettore di esercitarsi su queste diverse operazioni.
·e l'angolo di una retta (AB, A'B') con un piano FIG. XIX.

di una retta con un piano sarebbe una quantità in-
se non si fosse convenuto d'intendere con ciò *l'an-*
ma la retta proposta colla sua proiezione orto-
piano. Questa scelta è fondata sulla ragione che

cosiffatto angolo evidentemente il più piccolo di quelli che la retta data fa colle diverse linee condotte dal suo piede nel piano in quistione. Segue da ciò che calando da un punto di questa retta una perpendicolare sul piano proposto, l'angolo compreso tra questa perpendicolare e la retta data sarà *complemento* di quello richiesto, e basterà per dedurnelo.

Conduciamo dunque per lo punto (B,B') preso arbitrariamente sulla retta data una perpendicolare (BC,B'C') al piano PQR' si costruiscan poi l'angolo formato dalle due rette (AB, A'B') e (BC,B'C'). Applicando qui il metodo del n.° 43 si vedrà che fa mestieri condurre la perpendicolare BH sopra AC, prendere KH''=BH e portare l'ipotenusa B'H'' da H in B''; allora AB''C sarà l'angolo delle due rette. In seguito se ne costruirà il complemento conducendo per esempio B''D perpendicolare su CB''; ed in fine AB''D sarà l'angolo della retta (AB, A'B') col piano PQR.'

46. Lo stesso metodo può servire a trovare *gli angoli di una retta colle sue proiezioni;* perciocchè sono essi gli angoli che forma col piano orizzontale e col verticale; solamente le costruzioni precedenti potranno esser rese più semplici come ognuno scorgerà facilmente. D'altra parte vi si giugne di una maniera anche più spedita, abbassando la retta sopra uno de' piani fissi come al n: 17 in cui l'angolo ABA'' è l'inclinazione della retta (AB, A'B') sulla proiezione AB, o sul piano orizzontale.

47. *Costruire di posizione, e di grandezze la linea che misura la più breve distanza tra due rette non situate sopra un medesimo piano.*

Si sa che due rette nello spazio possono non incontrarsi mai, nè per questo esser parallele; nel qual caso trattasi di cercarè la più breve fra tutte le linee che riuniscono due punti qualunque delle rette date; ma per far comprendere meglio la serie delle operazioni da compiersi per risolvere questo problema, andiamo primieramente ad indicarle sopra una figura in prospettiva, in cui AB, e CD rappresenteranno le due rette proposte. Se per un punto qualunque B della prima si conduca una retta

'a a CD, e s'immagini il piano ABE, questo sa-
ɔ alla linea CD; ondechè calando da un punto di
a una perpendicolare DF sul piano ABE, *la di-
cata non potrebbe essere minore di* DF. Ma per di-
he una retta eguale a DF può di vero riunire due
linee proposte, conducasi dal piede F di questa per-
una parallela FG a CD; questa FG incontrerà
ente AB in un certo punto G, senza di che AB sa-
ela a CD, ciò ch'è contrario all' ipotesi stabilita.
ıdicolare GH innalzata dal punto G sul piano ABE
'emente contenuta nel piano CDFG di già nor-
'E, e per conseguenza GH incontrerà CD. *La
guale e parallela a* DF *misurerà dunque la più
za* delle rette AB, e CD, e sarà *perpendicolare*
contemporaneamente, perchè lo è al piano ABE
lelo.
mare *a posteriori* la prima di queste due conse-
osservare che congiungendo due punti qualun-
elle linee proposte, la retta *m n* uscirà dal piano
qual volta il punto *n* sarà differente da G. Allo-
ına obbliqua rispetto al piano ABE, epperò sarà
a *perpendicolare m p* che eguaglia GH. In quan-
quale il punto *n* coinciderebbe con G, la retta
llora *obbliqua* per rapporto a CD e per conse-
nga della perpendicolare GH, la quale rimarrà
re distanza di tutte le linee che possono riunire
unque delle rette proposte.
ora *le costruzioni che abbiamo indicate* disopra,
come l'abbiamo enunciato n°. 3) la differenza
i artifizi della geometria dimostrativa, ed i me-
la geometria descrittiva ottiene de' risultamenti
determinati per la soluzione dei problemi rela-
ensioni dello spazio.
(AB, A'B') e (CD, C'D') le due rette da- FIG. XXI.
e non istanno nello stesso piano, osservando in

prima che non sono parallele e poscia che i punti in cui si tagliano le rispettive proiezioni verticali ed orizzontali non son situati (n°. 43) sulla stessa perpendicolare alla linea della terra. Ciò posto si scelga il punto (B, B′) della prima retta per condurre una parallela (BE, B′E′) alla seconda, e si costruiscano le tracce AEQ, e QB′ del piano che conterebbe le linee (AB, A′B′) e (BE, B′E′); poi si abbassi da un puto (D, D′) della seconda retta una perpendicolare (DF, D′F′) sul piano AQB′, e si cerchi (*n.° 30*) per mezzo del piano proiettante DRR′ il punto (F, F′) in cui questa perpendicolare incontra il piano AQB′. Ora fa mestieri condurre per lo piede (F,F′) e parallelamente a (CD,C′D′) nna retta (FG, F′G′) che dovrà necessariamente (*n.° 47*) tagliare (AB, A′B′), per conseguenza i due punti G e G′ dovranno essere sopra una stessa perpendicolare alla linea della terra. In seguito dal punto (G,G′) si conduca parallelamente a (DF, D′F′) la linea (GH, G′H′); la quale attesochè deve incontrare parimente la retta (CD, C′D′), sarà d'uopo ancora che H, ed H′ si corrispondano sopra una stessa perpendicolare alla linea della terra. Allora GH, e G′H′ saranno le proiezioni della più breve distanza dimandata; poscia per ottenerne la lunghezza assoluta si prenderà (*n. 17*) sull'orizzontale condotta pel punto G′ una parte KG″ = GH e si condurrà la retta G″H′ che sarà infine la vera lunghezza della distanza mentovata.

49. Si potrebbe ancora risolvere lo stesso problema cercando l'intersecazione de' due piani perpendicolari ad AQB′, che passino uno per la retta (AB, A′B′), l'altro per la retta (CD, C′D′); inoltre questi piani si determinerebbero abbassando una perpendicolare sopra AQB′ per un punto di ciascuna delle rette proposte; ma lasceremo al lettore la cura di adempiere queste costruzioni.

50. Se le due rette date fossero parallele, la loro distanza sarebbe da per tutto la stessa e per ottenerla sarebbe bastevole cercare *la più breve distanza della prima retta ad un punto della seconda*, per esempio alla traccia orizzontale di que-

e questo è un problema del quale abbiamo data la
: ne' *n. 36*, e *37*.

diverse quistioni che abbiamo testè percorse com-
tutti gli elementi necessarî per risolvere i problemi in
i sarà a combinare che rette con piani, ed utili ap-
se ne troveranno nel capitolo seguente. Qui faremo
osservare ch' essendo date le proiezioni di tutt' i ver-
poliedro, si saprà determinare la posizione, la lun-
ciascuno de' suoi spigoli, e l' inclinazione di ciascu-
iul piano orizzontale, o sia l' angolo, che due facce
loro; si potrà ancora costruire in piano e nelle sue
nsioni il poligono di una qualunque di queste facce,
e la sezione che produrrebbe nel poliedro un piano
osizione. Reciprocamente se la situazione del polie-
nita da altre condizioni di numero sufficiente, se
io dedurre le due sue proiezioni: ma poichè le ope-
risultamento varierebbero necessariamente colla scel-
, noi citeremo un solo esempio il quale basterà per in-
mmino da seguire in altri casi.

*parallelipedo rettangolo sta con la base sopra un
linato all' orizzonte per una quantità ω, ed ha per
izzontale PQ: uno spigolo di questa base è proiet-
ontalmente secondo AB, mentre gli altri due spigoli
anno le date lunghezze l' ed l'', si dimanda di co-
proiezioni orizzontali, e verticali di questo solido.*

FIG. XXII.

ice B immaginiamo un piano di profilo PRR' perpen-
la traccia PQ; questo taglierà il dato piano secondo
:he formerà con PR l'angolo ω per conseguenza se si
esto profilo facendolo girare intorno a PR, e si co-
ngolo $RPR'' = \omega$, poscia si porti il punto R'' sulla
R', la retta R'Q sarà (*n. 39*) la traccia verticale del
sul quale poggia la base del parallelepipedo. Di più
lgere quest'ultimo piano intorno a PQ, il punto B ch'è
in B'' sul profilo sarà trasportato evidentemente in *b*;
:he A *b* sarà la vera lunghezza dello spigolo AB ab-

bassata sul piano orizzontale. Allora tirando la retta $A\,d$ eguale ad l' e perpendicolare sopra $A\,b$, si otterranno due lati della base abbassata, quindi rialzandola, i suoi due lati saranno proiettati secondo AB ed AD, ed il parallelogrammo ABCD sarà la proiezione orizzontale della base del parallelepipedo. Premesso ciò lo spigolo perpendicolare a questa base, il quale parte dall' angolo B, è proiettato orizzontalmente (*n.* 33) sulla retta indefinita BP perpendicolare a PQ; mentre sul profilo è rappresentato nella vera grandezza dalla linea $B''F''$ eguale ad l'' e condotta ad angolo retto sopra PR''; per conseguenza se si proietta l'estremità F'' in F, BF sarà la proiezione orizzontale dello spigolo in questione: poscia formando il parallelogrammo ABFE, e terminando le altre facce con diverse parallele, si otterrà facilmente la proiezione compiuta ABCDHEFG di tutto il solido sul piano orizzontale.

In quanto all'altra proiezione si osserverà che i lati AD e CD sono sul piano PQR'; perlocchè (*n.* 25) le loro proiezioni verticali sono $A'K'$ ed $M'N'$, le quali col loro incontro determinano il punto D' proiezione verticale dell'angolo D. (*). Se inoltre si proietta il vertice C in C' sopra $M'N'$, si potrà compiere il parallelogrammo $A'D'C'B'$, e condotte pei quattro suoi angoli delle perpendicolari alla traccia QR', basterà proiettare su queste rette indefinite i punti E,F,G,H, in E',F',G',H', ciocchè dovrà eziandio fornire delle rette rispettivamente parallele ai lati della base inferiore $A'B'C'D'$.

Resterà finalmente a discernere quali sieno gli spigoli visibili sopra ciascun piano di proiezione, osservando le regole stabilite (*n.* 15, e 16) e fa mestieri rammemorarsi che il *punto di veduta*, essendo differente pel piano verticale e per l'orizzontale (*n.* 16) uno stesso spigolo, come (AD, $A'D'$) può essere visibile sopra uno, ed invisibile sull'altro de'due piani.

(*) In tal guisa si potrebbero dedurre i punti D',C',B', dalle loro proiezioni orizzontali, e dalle altezze sopra alla linea della terra, perciocchè queste verrebbero somministrate dal profilo in cui i nostri punti sono tutti proiettati sulla retta PR''.

CAPITOLO III.

...UZIONE DELL' ANGOLO TRIEDRO.

...golo solido a tre facce SABC si offrono riuniti al ...oli piani ed altrettanti *diedri*: i primi sono gli ... che formano gli spigoli tra loro, i secondi sono ...ambievole delle facce. De' quali sei angoli dati ..., si tratta di trovare gli altri, ciocchè offre sei ...ti; perciocchè dinotando con A,B,C gli angoli ...o rispettivamente per spigoli SA, SB, SC e con ...goli piani o le facce opposte a' primi, possono

FIG. XXIII.

...acce, o angoli piani . . . . a, c e γ.
...ce e l'angolo diedro compreso. . . . . a, c e C.
...ce e l'angolo diedro opposto ad una di
. . . . a, c e B.
. . . . A, B, C.
...goli diedri . . . .
...goli diedri, e la faccia compresa . . . A, B e γ.
...goli diedri ed una delle facce opposte. A, B, e c.

... evidentemente le sole combinazioni daddovero ...anzi le ultime tre possono ridursi alle precedenti ... triedro *supplementale*.

...li un angolo triedro *supplementale*.
...punto qualunque S' preso *nello interno* dell'an...
..., caliamo una perpendicolare su ciascuna delle ...er fissare le idee riguardiamo il piano BSC come ...lo spigolo SA situato sopra esso. Onde formeremo ...ngolo triedro in S'avente per spigolo la verticale ...ue rette S'B', S'C', rispettivamente perpendico...ce ASC, ASB, il quale angolo solido è detto *supple*... primo, perciocchè le facce e gli angoli diedri del... supplementi degli angoli e delle facce dell' altro; ... dimostrare queste relazioni reciproche, osserviamo

che per formare il nuovo angolo solido non è cosa indifferente calare le perpendicolari da tale o tale altro punto dello spazio; poichè tre rette, o tre piani che si tagliano in uno stesso punto S' prolungati da una parte e dall'altra determinano sempre otto angoli triedri diversi, fra i quali non vi sono che due (uno simmetrico dell'altro ed opposto al vertice), che sieno effettivamente supplementali dell'angolo SABC. Per la qual cosa a fine di non errare nel modo di prolungare le perpendicolari, ci siamo avvisati di abbassarle sulle facce a partire da un punto preso nell'interno dell'angolo solido proposto; e quindi potremo trasportare, l'angolo S' così formato in qualsivoglia punto dello spazio.

55. Ciò posto, dinotando con A', B', C' gli angoli diedri compresi tra le facce che si tagliano secondo $S'A', S'B', S'C'$ e con a', c', γ' le facce opposte a quelli, si vede che il piano $A'S'B'$ perpendicolare alle due facce BSC, ASC le taglierà secondo due rette $A'E, B'E'$, anche perpendicolari sopra SC, epperò l'angolo $A'EB'$ sarà la misura dell'angolo diedro C. Ma il quadrilatero piano $S'A'EB'$ ha due angoli evidentemente retti, cioè A', e B'; dunque gli altri due sono supplementali e si ha $A'S'B' + A'EB' = 180{:}^\circ$ ovvero. . . . . $\gamma' + C = 180{:}^\circ$

si proverà parimente che. . . . . . . $c' + B = 180{:}^\circ$

$a' + A = 180{:}^\circ$

considerando i quadrilateri $S'A'DC'$ ed $S'C'FB'$ prodotti dalle sezioni delle facce $A'S'C'$, e $B'S'C'$ nell'angolo solido S. Dunque le facce dell'angolo solido S' sono i supplementi degli angoli diedri in S.

56. Ora consideriamo gli angoli diedri di S'; le due facce $B'S'A'$, $C'S'A'$ tagliano il piano BSC al quale è ciascuna perpendicolare, secondo le rette $A'E, A'D$; dunque l'angolo rettilineo $DA'E$ è la misura dell'angolo diedro A'. Ma nel quadrilatero $SDA'E$ gli angoli D ed E sono evidentemente retti poichè la faccia $A'S'B'$ è perpendicolare sopra SC, ed $A'S'C'$ sopra SB; sicchè gli altri due angoli di cotal quadrilatero sono supplementali, e si ha

...SE = 180,° ovvero . . . . . . $A' + \alpha = 180,°$
...guisa sarà provato che . . . $B' + \epsilon = 180,°$
$C' + \gamma = 180,°$

...adrilateri SEB'F, ed SDC'F. Dunque gli angoli die-
...no i supplementi delle facce di S, e può assumersi
...ultimo angolo solido *supplementale dell'angolo S'*.
...rviamo qui che descrivendo col centro S una sfera
...io qualunque SA, questa sarebbe tagliata dalle facce
... solido S secondo tre archi di circoli massimi AB,
...uali farebbero un *triangolo sferico* i cui lati misure-
... angoli piani α, ϵ, e γ, e gli angoli non sarebbero che
...oni A, B, C, delle facce dell' angolo solido. La cui
... dedotta dalla cognizione di tre de' suoi elementi,
... alla risoluzione grafica de' problemi che la trigono-
...ca tratta col calcolo. Inoltre se si trasportasse al cen-
...golo solido S', le sue facce taglierebbero la stessa
...do un altro triangolo che sarebbe il *supplementale*,
... ABC, del quale si fa parimenti uso nella trigonome-
... (*).
...niamo adesso ai sei problemi da noi enunciati *(n. 53)*,

...vere l'angolo polare di ABC *nella situazione in cui si ado-*
...mente nella trigonometria, *bisognerebbe a rigore adottare*
...lo simmetrico di S'A'B'C'; *il quale si otterrebbe prolungan-*
...goli oltre al punto S', *vale a dire che bisognerebbe fin da*
...re dal vertice S tre perpendicolari alle facce di quest'an-
...na sopra BSC e collocata siccome SA dallo stesso verso del-
...sa, l' altra su CSA e dal lato medesimo di SB, da ultimo
...a ASB e dalla parte di SC. L'angolo solido siffattamente
...ebbe tagliato la sfera precisamente giusta il triangolo
...C, comechè la figura sarebbe stata poco intelligibile sen-
...o dei triangoli sferici, perciò abbiam noi preferita la co-
... *n. 54*, che soprappiù trattandosi di angoli solidi, quelli
...etrici uno dell' altro, si compongono degli stessi elementi
...nto in altro modo, e le *relazioni supplementali* sono vere

ed osserviamo che quando si danno i tre angoli diedri A, B, C, se ne posson trovare immediatamente i supplementi che saranno (n. 55) le facce α', ϵ', γ' di un altro angolo solido S'; poi se pel primo caso del n. 53 si sanno dedurre da questi nuovi dati gli angoli diedri A', B', C', per ottenere (n. 56) gli angoli piani α, ϵ, γ, dell'angolo solido primitivo S, fa mestieri prenderne i supplementi. Si vede da ciò che il quarto caso si riduce al primo, siccome il quinto al secondo, ed al terzo il sesto. Andiamo dunque ad occuparci della risoluzione dei tre primi problemi.

FIG. XXIV. 59. Primo caso. *Date le tre facce α, ϵ, γ, di un angolo solido, trovare i tre angoli diedri A, B, C.*

Sieno A''SB, BSC CSA' i tre angoli dati supposti abbassati sul piano della faccia BSC, che considereremo come *il piano orizzontale* del disegno. È chiaro che per ricomporre l'angolo solido, basterebbe far girare le due facce laterali A''SB, A'SC intorno alle rette SB, SC come assi di rotazione, finchè le due rette SA'' ed SA' venissero a coincidere l'una sull'altra, la cui posizione comune nello spazio sarebbe quella del terzo spigolo, del quale dinoteremo con SA la posizione incognita. Per determinarla prendiamo sulle rette abbassate SA' ed SA'' due distanze qualsisieno ma eguali, SD' = SD''; allora i punti D' e D'' dovranno evidentemente riunirsi nel comporre l'angolo solido; e poichè girando intorno alle rette SC, SB non escono dai piani verticali D'FD, D''ED ad esse perpendicolari, ne segue che i punti abbassati in D' e D'' anderanno a coincidere col punto dello spazio proiettato orizzontale in D, e che il terzo spigolo dell'angolo solido avrà per proiezione SDA. Oltracciò il piano verticale FD perpendicolare ad SC dovrà tagliare le due facce che passano per questo spigolo secondo le rette FD, FD' le quali rialzate comprenderanno tra esse un angolo eguale alle inclinazioni di queste facce, e formeranno un triangolo rettangolo colla verticale D; per conseguenza se si abbassa questo triangolo intorno a FD, e si alzi su questa una perpendicolare indefinita DG' che si taglierà con un raggio FG' = FD', otterremo così l'angolo rettilineo G'FD che misura l'angolo diedro C.

rimenti il piano verticale ED taglierà le due facce, che
›er SB, secondo le rette ED, E'D'' le quali rialzate for-
la misura dell'angolo diedro B; e dappoichè queste
ıcora colla verticale D un triangolo rettangolo di cui
la base e l'ipotenusa, si potrà facilmente costruire
nento G''ED del triangolo, e l'angolo B sarà misurato
'. Si osserverà inoltre che le due verticali DG', e DG''
essere eguali, poichè l'una e l'altra esprimono l'al-
punto unico dello spigolo SA, che è proiettato in D.
ːr ottenere il terzo angolo diedro A, si condurrà un
ante perpendicolare ad SA pel punto di detto spigolo
in D, ed abbassato in D' da una parte ed in D'' dal-
:uesto piano taglierà le facce laterali secondo le rette
M rispettivamente perpendicolari ad SA' ed SA''; e
ˌaria conseguenza la sua intersecazione colla faccia BSC
tta MN che dovrà evidentemente esser perpendicolare
ezione orizzontale SA del terzo spigolo. Se dunque col-
e D''M, MN, ND', si costruisca il triangolo PMN, l'an-
ertice P sarà precisamente la misura dell'angolo die-
a per ispigolo SA.
serviamo inoltre che questo triangolo, prima di aver
›rno ad MN, aveva il suo vertice P situato nel punto
olo SA che è proiettato in D. Ma poichè questa retta
›endicolare come testè dicemmo al piano verticale SA,
› non sarà uscito da questo piano, epperò sarà mestie-
rovi abbassato sul prolungamento della retta SDA.
costruzioni precedenti sono similmente applicabili al
i o tutti o qualcuno degli angoli α, ζ, γ, sieno ottusi:
ıcchè il problema fosse possibile è sempre bisogno,
i angoli α, ζ, γ facciano una somma minore di quattro
ti; 2.° che il maggiore di essi sia minore della somma
enti. In effetto se queste condizioni non fossero adem-
lati della quistione, è facile vedere che le operazioni
ornirebbero per la costruzione dei triangoli FDG' ed
otenuse più corte delle basi; laddove questi triango-

ed osserviamo che quando si danno i tre angoli diedri A, B, C, se ne posson trovare immediatamente i supplementi che saranno (*n. 55*) le facce α', β', γ' di un altro angolo solido S'; poi se pel primo caso del *n. 53* si sanno dedurre da questi nuovi dati gli angoli diedri A', B', C', per ottenere (*n. 56*) gli angoli piani α, β, γ, dell'angolo solido primitivo S, fa mestieri prenderne i supplementi. Si vede da ciò che il quarto caso si riduce al primo, siccome il quinto al secondo, ed al terzo il sesto. Andiamo dunque ad occuparci della risoluzione dei tre primi problemi.

FIG. XXIV.

59. Primo caso. *Date le tre facce α, β, γ, di un angolo solido, trovare i tre angoli diedri A, B, C.*

Sieno A''SB, BSC CSA' i tre angoli dati supposti abbassati sul piano della faccia BSC, che considereremo come *il piano orizzontale del disegno*. È chiaro che per ricomporre l'angolo solido, basterebbe far girare le due facce laterali A''SB, A'SC intorno alle rette SB, SC come assi di rotazione, finchè le due rette SA'' ed SA' venissero a coincidere l'una sull'altra, la cui posizione comune nello spazio sarebbe quella del terzo spigolo, del quale dinoteremo con SA la posizione incognita. Per determinarla prendiamo sulle rette abbassate SA' ed SA'' due distanze qualsisieno eguali, SD'=SD''; allora i punti D' e D'' dovranno evidentemente riunirsi nel comporre l'angolo solido; e poichè girando intorno alle rette SC, SB non escono dai piani verticali D'FD, D''ED ad esse perpendicolari, ne segue che i punti abbassati in D' e D'' anderanno a coincidere col punto dello spazio proiettato orizzontale in D, e che il terzo spigolo dell'angolo solido avrà per proiezione SDA. Oltracciò il piano verticale FD perpendicolare ad SC dovrà tagliare le due facce che passano per questo spigolo secondo le rette FD, FD' le quali rialzate comprenderanno tra esse un angolo eguale alle inclinazioni di queste facce, e formeranno un triangolo rettangolo colla verticale D; per conseguenza se si abbassa questo triangolo intorno a FD, e si alzi su questa una perpendicolare indefinita DG' che si taglierà con un raggio FG'=FD', otterremo così l'angolo rettilineo G'FD che misura l'angolo diedro C.

imenti il piano verticale ED taglierà le due facce, che
r SB, secondo le rette ED, E'D'' le quali rialzate for-
a misura dell'angolo diedro B; e dappoichè queste
ora colla verticale D un triangolo rettangolo di cui
ı base e l'ipotenusa, si potrà facilmente costruire
ento G''ED del triangolo, e l'angolo B sarà misurato
Si osserverà inoltre che le due verticali DG', e DG''
essere eguali, poichè l'una e l'altra esprimono l'al-
unto unico dello spigolo SA, che è proiettato in D.
ottenere il terzo angolo diedro A, si condurrà un
nte perpendicolare ad SA pel punto di detto spigolo
in D, ed abbassato in D' da una parte ed in D'' dal-
esto piano taglierà le facce laterali secondo le rette
[rispettivamente perpendicolari ad SA' ed SA''; e
ria conseguenza la sua intersecazione colla faccia BSC
a MN che dovrà evidentemente esser perpendicolare
zione orizzontale SA del terzo spigolo. Se dunque col-
D''M, MN, ND', si costruisca il triangolo PMN, l'an-
rtice P sarà precisamente la misura dell'angolo die-
per ispigolo SA.
rviamo inoltre che questo triangolo, prima di aver
no ad MN, aveva il suo vertice P situato nel punto
lo SA che è proiettato in D. Ma poichè questa retta
endicolare come testè dicemmo al piano verticale SA,
non sarà uscito da questo piano, epperò sarà mestie-
ovi abbassato sul prolungamento della retta SDA.
costruzioni precedenti sono similmente applicabili al
o tutti o qualcuno degli angoli α, ζ, γ, sieno ottusi:
chè il problema fosse possibile è sempre bisogno,
angoli α, ζ, γ facciano una somma minore di quattro
i; 2.° che il maggiore di essi sia minore della somma
nti. In effetto se queste condizioni non fossero adem-
ati della quistione, è facile vedere che le operazioni
rnirebbero per la costruzione dei triangoli FDG' ed
tenuse più corte delle basi; laddove questi triango-

li saranno possibili, se le due condizioni su enunciate sien soddisfatte, o per conseguenza l'angolo solido potrà esser composto coi dati del problema.

64. *Ridurre un angolo all'orizzonte.* Questo problema sì utile ne'lavori topografici ha per oggetto di trovare la proiezione orizzontale di un angolo α conosciuto di grandezza, i cui lati fanno colla verticale abbassata dal vertice gli angoli dati ϵ, e γ. Or se s'immagina un angolo solido che abbia per ispigoli questa verticale e i due lati dell'angolo proposto α, se ne conosceranno le facce α, ϵ, γ, e la proiezione dimandata sarà evidentemente l'angolo rettilineo che misura l' angolo diedro A compreso fra le due facce verticali. Per la qual cosa questo problema rientra in quello del *n. 59*, e potrebbe esser risoluto nell' istesso modo, se la ipotesi che uno degli spigoli debba essere verticale ci permettesse di dare alla figura un collocamento più acconcio.

FIG. XXV. In un piano qualunque formiamo colla verticale SA gli angoli $ASB = \gamma$, $ASC = \epsilon$ poscia lasciando invariabile quest'ultimo facciamolo girare attorno ad SA fintantochè il lato movibile SC formi nello spazio un angolo α col lato fisso SB; noi otterremo in tal guisa l'angolo dato esattamente nella situazione che gli assegna il problema, e ne sarà facile dedurne poi la proiezione orizzontale. Ora in questo movimento di rotazione intorno di SA, il piede C del lato movibile descriverà un arco di cerchio CC' il cui centro sarà in A, e si fermerà su quest'arco in un punto C' tale che la sua distanza dal punto fisso B sarà evidentemente la base di un triangolo i cui lati son rette uguali ad SB ed SC, e l'angolo compreso eguale ad α. Se dunque sul piano verticale si costruisca un'angolo $BSC'' = \alpha$, e si prenda $SC''=SC$, la retta BC'' sarà la distanza onde parliamo; e rapportandola con un arco di cerchio da B in C', si conoscerà la posizione C' in cui deve fermarsi il piede del lato movibile SC il quale per conseguenza sarà proiettato orizzontalmente secondo AC'; d' altra parte il lato fisso SB essendo proiettato sopra AB, se ne conchiuderà l' angolo α aver nello spazio per proiezione orizzontale BAC'; perlocchè quest'ultimo angolo, che

più grande o più piccolo di α, è quello da adoperar-
carta topografica in cui tutti gli oggetti devono es-
sentati dalle rispettive proiezioni.

ndo caso. *Date due facce α, e ϵ di un angolo solido*
angolo diedro compreso C, trovare le altre parti.

C=α, CSA'=ϵ le due facce date abbassate sul piano FIG. XXVI.
fatta girar la seconda intorno ad SC finchè formi
ıgolo diedro C, si otterranno due facce dell'angolo
loro situazione effettiva. Or durante questo movi-
·tazione un punto D' preso a volontà sullo spigolo
a uscirà affatto dal piano verticale D'FM perpendi-
e di rotazione; dunque se in questo piano abbassa-
FM si costruisca l'angolo MFK = C, e si prenda
D' è evidente che il punto D' avrà a situarsi in G'
uenza sarà proiettato orizzontalmente in D, preso
faccia movibile ASC l'inclinazione assegnata dalla
·a il punto dello spazio che ha per proiezione D e
alla terza faccia incognita, nè uscirà menomamente
icale DED'' perpendicolare all'asse di rotazione lad-
pisca abbassata la faccia intorno di SB; e poichè
ancora ad una distanza dal vertice eguale ad SD',
raggio si descriva un arco di cerchio, la retta indefi-
tagliata in D'' che determinerà l' angolo D''SB
:cia incognita. Trovate allora le tre facce dell'an-
ricaderà nel caso del problema del *n. 59* il quale
a costruzione degli angoli diedri.

tresi adoperare la distanza MG' che è eguale evi-
l MD'' per descrivere un arco di cerchio, il cui
rimo avrebbe determinato il punto D''.

·aso. *Essendo date due facce α, ϵ, di un angolo*
olo diedro B opposto ad una di esse trovare le

a BSC=α, CSA'=ϵ le due facce abbassate sul FIG. XXVII.
ale. Se in un piano verticale EF perpendicolare
B si costruisca l'angolo REF=B, e s'immagini un

piano indefinito che passi per SE ed ER, indicherà questo la posizione della faccia incognita; in modo che per comporre l'angolo solido non rimarrà solo a far girare la faccia A'SC intorno a CS, sin tanto che lo spigolo SA' venga a situarsi nel piano SER. Durante questa rotazione il punto D' dello spigolo movibile non uscirà dal piano verticale D'FM condotto dal punto F perpendicolarmente all'asse di rotazione CS, e per conseguenza si fermerà sulla intersecazione del piano verticale FM coll'indefinito SER. La quale è una retta che parte da M e muove evidentemente ad incontrare la verticale F al medesimo punto in cui la incontra la retta ER rialzata. Laonde se per trovare quest'altezza si tiri la retta FR perpendicolare ad EF, e si riporti FR ad angolo retto sopra FM da F in R', la linea MR' sarà l'intersecazione onde noi abbiamo parlato e sulla quale dovrà fermarsi il punto D' dello spigolo movibile SA'. Per la qual cosa descrivendo col raggio FD' un arco di cerchio che taglia MR' in G, si otterrà nel piano verticale FM la posizione G di un punto del terzo spigolo SA del quale sarà facile dedurre la proiezione orizzontale.

Ora osserviamo che cotal punto G situato nel piano verticale MF appartiene alla faccia incognita, e abbassata questa intorno allo spigolo SB non cambierà di distanza rispetto ai punti M ed S situati sull'asse di rotazione. Ma queste distanze sono evidentemente MG e SD'; dunque se con queste rette per raggio si descrivono due archi di cerchio, il loro incontro D'' determinerà il sito dell'abbassamento del punto G, e per conseguenza la faccia che si dimanda sarà D''SB. Trovata una volta questa faccia, il problema sarà ridotto al caso del *n.* 59, e si potranno costruire le altre parti dell'angolo solido.

67. Osserviamo che l'arco di cerchio descritto col raggio FD' taglierà in generale la retta MR' in due punti G e *g*: in guisa che la faccia A'SC girando intorno di CS potrà prendere due posizioni, nelle quali lo spigolo SA' sarà situato nel piano indefinito SER, o SMR'; per una delle quali il punto D' si ferma in G e per l'altra in *g*. Per conseguenza se si abbassa quest' ul-

come il primo, girando intorno ad SB, esso si tra-
ı d'', e d''SB sarà allora la grandezza della terza
gnita. Vi saranno adunque due angoli solidi diffe-
i potranno comporre con i dati α, c, e B, risultamen-
a quello che si ha nella costruzione di un triangolo
nel quale sieno cogniti due lati, e l' angolo opposto
essi.

mestieri aggiungere che se l'arco descritto col rag-
ıon toccasse la retta MR' vi sarebbe una soluzione e
ounto non la incontrasse.

ıdimeno conviene osservare che la seconda soluzio- FIG. XXVII.
be essere rigettata se il punto g cadesse sopra MR',
MF, cioè sotto al piano orizzontale (noi supponiamo
i abbia cura di costruire l'angolo dato B acuto, o ot-
pre *al di sopra* del piano di proiezione). In effetto
olido che allora si otterrebbe, sarebbe evidentemente
delle facce α, c, e di un angolo diedro supplementale
uale poichè è qui dato graficamente e non dal valore del
non può esserviambiguità sulla grandezza, nè per con-
è permesso di adottare indifferentemente B o 180°—B.
ragione medesima bisognerebbe rigettare le due solu-
lichiarare il problema impossibile con gli attuali dati se
ɨ e g cadessero entrambi al di sotto dell'orizzontale MF,
non potrà avvenire per altro che quando l'angolo die-
ırà ottuso.

LIBRO SECONDO

DELLE SUPERFICIE, E DE' LORO PIANI TANGENTI

CAPITOLO PRIMO.

GENERAZIONE E RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DELLE SUPERFICIE.

69. Per rappresentare graficamente una superficie, abbiamo già detto *(n. 7)* che non fa d' uopo siccome per le linee, cercare di costruire su due piani fissi le proiezioni de' differenti punti di questo luogo geometrico; infatti, attesochè sopra una superficie, a partire da un dato punto si può percorrere una infinità di direzioni, il mezzo suddetto non avrebbe altro risultamento, che di soppraccaricare i piani di proiezione di una moltitudine di linee e di punti de' quali non si scorgerebbe il rapporto, nè il nesso principalmente dipingerebbe all'occhio dello spettatore la forma della superficie, la sua curvatura più o meno pronunciata ed il numero delle sue falde. Adopreremo dunque un altro metodo *(n. 93)* dedotto dalla natura stessa di questa grandezza, ond'è mestieri dapprima profferire una definizione precisa.

70. Col vocabolo *superficie* non si deve intendere solamente una serie o di curve, o di punti ravvicinati gli uni agli altri quanto si voglia, senza un rapporto fissato tra essi; ma è d'uopo ancora che queste linee, e questi punti sieno sottoposti ad un vincolo comune e continuo la cui espressione analitica è l' equazione

rficie, della quale la definizione geometrica dev' es-
:iata come segue.

perficie è il luogo geometrico delle diverse posizioni
le nello spazio una data linea movibile che cambia
ne, ed anche di forma, secondo una legge determi-
itinua.

ı movibile si chiama la *generatrice;* e per le parole
determinata, bisogna intendere di tali condizioni le
ogni punto dato dello spazio, non lascino alcun che di
nella forma e nella posizione della generatrice. Ora
vole magistero, per esprimere (almeno in parte) la
questo movimento, è di assegnare il sito di una o più
nate *direttrici*, sulle quali dovrà costantemente appog-
generatrice in tutte le sue posizioni: di sorta che per
ompiutamente una superficie particolare, bisogna in-
natura della generatrice, quella del suo movimento,
.rici sulle quali dovrà scorrere durante il cammino (*).
i cambiano le sole direttrici, si ottengono diverse su-
ppartenenti tutte ad *una stessa specie;* ed inoltre deve
lersi che ciascuna superficie particolare è suscettiva
finità di maniere di generazioni. Andremo a citarne

---

tti esprimendo analiticamente questa maniera di generazione,
prietà equivalente si ottiene l' equazione della superficie (ve-
alisi applicata alla geometria delle tre dimensioni cap. XIV.)
mente allorchè un luogo geometrico è assegnato direttamente
ızione $F(x, y, z)=0$, se si taglia questa superficie con di-
i, orizzontali per esempio, si ottengono le curve

$$(1)\quad z=\alpha,\quad \text{e}\ F(x, y, \alpha)=0\quad (2)$$
$$z'=\alpha',\quad \text{e}\ F(x, y, \alpha')=0$$
$$z''=\alpha'',\quad \text{e}\ F(x, y, \alpha'')=0$$

unque delle quali è la stessa cosa della prima quando si attri-
alla costante α i valori successivi α', α''; per conseguenza
verse curve sono le posizioni consecutive che prenderebbe la
) e (2) se si facesse muovere in piani paralleli, cambiando
sue dimensioni, secondo una legge dipendente dalla maniera

molti esempi, tanto per chiarire la definizione generale, quanto per acquistare fin da ora la cognizione de' luoghi geometrici dei quali dobbiamo far uso frequentemente.

FIG. XXVIII. 71. *Una superficie conica* è il luogo geometrico di tutte le posizioni che prende una retta movibile SA, obbligata a passar sempre per un punto fisso S, appoggiandosi costantemente sopra una curva data ABC, che può essere *a doppia curvatura*, cioè non avere tutt'i suoi punti situati nello stesso piano. Secondo questa definizione, la retta movibile SA è una generatrice costante di forma, e variabile solamente di posizione, mentre il punto fisso e la curva ABC sono le direttrici; di più questa linea SA, avendo a tenersi siccome indefinitamente prolungata da una parte e dall'altra del punto S che chiamasi il *vertice*, o il *centro*, genererà le due falde opposte ed indefinite SABC, S $\alpha\,\mathrm{c}\,\gamma$; Se alla curva ABC si sostituisse un' altra direttrice, cambiando anche il vertice S, si otterrebbero diverse superficie particolari appartenenti tutte *alla specie de' coni*.

72. Ma queste superficie ammettono molte altre maniere di generazione. In effetto se si taglia il cono SABC con diversi piani paralleli, otterremo le sezioni *simili* A'B'C', A''B''C'', cioè delle curve in cui saranno certi punti O', O'', tali che i raggi vettori rispettivamente paralleli, O'A' ed O''A'', O'B' ed O''B'', O'D' ed O''D'',.. avranno fra loro un rapporto costante: questa proposizione, sempre vera quale che sia la direttrice ABC si dimostra facilmente mercè la teorica delle rette proporzionali. Per fissare le idee, ammetteremo che ABC sia una ellisse, la quale abbia per semi-assi $OA=a$, $OB=b$; allora le altre sezioni

---

colla quale la costante α entra nell'equazione (2): sicchè eliminando questo parametro tra (1) e (2), si ricade evidentemente nell'equazione $F(x, y, z)=0$, ch'è però il luogo di tutte le posizioni della prima curva movibile. Aggiungia mo inoltre, che siccome si può adottare una infinità di direzioni pe' piani secanti paralleli, ovvero adoperare altre superficie secanti, così per ogni superficie ha luogo una infinità di modi di generazione.

''C'' , supposte parallele a questa base , saranno
o i cui assi saranno paralleli a quelli di ABC, e tali

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} \cdots\cdots$$

, se si fa muovere l'ellisse ABC di guisa; 1.° che il
percorra la retta SO ; 2.° che i suoi assi restino
: loro posizioni primitive; 3.° che questi decresca-
› proporzionalmente alle distanze SO,S'O',S''O''..;
lente che siffatta ellisse movibile coinciderà succes-
on A'B'C', A''B''C'' , ... e diverrà così, una ge-
riabile di forma e di posizione, per la superficie co-
ta. Ma per ridurre queste diverse condizioni ad una
e più semplice , basterà rammemorarsi che una cur-
ido grado è determinata nel suo piano dal conosce-
e' suoi punti; per conseguenza, se si traccino sul co-
ati fissi SA , SB, SC , SD , SE , potrem dire che per
superficie, bisognerà far muovere l'ellisse variabile
niera che il suo piano resti parallelo a se medesimo,
stantemente queste cinque rette tenute come diret-

nte, poichè è arbitrario adottare pe' piani secanti pa-
direzione qualunque , e poichè anche si può tagliare
altre superficie, tali quali sarebbero alcune sfere de-
centro O, e con raggio variabile, è evidente ch'esiste
à di linee piane o a doppia curvatura, le quali posso-
si per generatrici di una stessa superficie conica.
: *superficie cilindrica* è il luogo geometrico delle di- FIG. XXIX
zioni di una retta movibile AA' che striscia lungo una
ı ABC, conservandosi parallela ad una direzione data.
ta prima maniera di descrizione, in cui la generatrice
tante di forma, non è la sola ammissibile; perciocchè
ıtte le sezioni parallele al piano di *ABC* sarebbero qui
'e evidentemente identiche, la superficie si può altresì
re come percorsa dalla curva ABC che si muova paralle-
. sè stessa, appoggiata sempre collo stesso punto in sul-

la retta AA', la quale diverrebbe in questo caso una direttrice della curva movibile ABC. Variando poscia la direzione delle sezioni parallele, si otterrebbe un'altra infinità di generatrici accomodate a descrivere lo stesso cilindro : pure, queste superficie possono esser considerate come un caso particolare dei coni, i cui vertici si allontanano all'infinito.

74. Osserviamo alla sfuggiasca, che se la direttrice del cono o del cilindro fosse una linea retta, la superficie si ridurrebbe ad *un piano*, il quale può per questo essere definito come il luogo delle posizioni che prende una retta movibile soggetta, 1.° a strisciare sopra una retta fissa, 2.° a passare costantemente per un dato punto, ovvero a conservarsi sempre parallela alla sua prima posizione.

FIG. XXX 75. *Una superficie di rivoluzione* è generata da una curva qualunque $GG'G''$ che gira intorno ad una retta fissa DZ, di maniera che ciascuno de'suoi punti G descriva un cerchio il cui piano sia perpendicolare all'asse DZ, ed il raggio la più corta distanza GO da quel punto all'asse mentovato. Osserviamo che questi diversi raggi GO, $G'O'$, $G''O''$, quantunque perpendicolari tutti a DZ, non saranno paralleli tra loro quando la generatrice $GG'G''$ fosse a doppia curvatura; o non essendola, allorchè il suo piano non contenesse l'asse DZ: d'altro lato i differenti cerchi GMA, $G'M'A'$, ... descritti con questi raggi, si chiamano *i paralleli* della superficie.

76. Se per l'asse DZ si conducano dei piani qualunque ZOA, ZOM, si otterranno delle sezioni $AA'A''$, $MM'M''$, che si chiamano *i meridiani*, o le *curve meridiane* della superficie, e sono essenzialmente identiche in quanto alla loro forma. In fatti questi piani *meridiani* tagliano i *paralleli* secondo alcuni raggi che comprendono gli angoli evidentemente eguali AOM, $A'O'M'$, $A''O''M''$, per conseguenza se si fa girare il piano ZOM di una quantità angolare MOA, tutti i raggi OM, $O'M'$, $O''M''$, coincideranno con OA, $O'A'$, $O''A''$, e le curve meridiane si confonderanno le une colle altre.

77. Onde risulta ancora che il meridiano $AA'A''$ girando in-

ercorrerà tutta la superficie di rivoluzione, e può
iderato come novella generatrice che surrogherebb-
primitiva GG′G″, la quale sarà col fatto distinta
io, quando non avrà tutt'i suoi punti situati in uno
che passa per DZ, come potrà osservarsi nella
a, che si suppone costrutta in prospettiva sul pia-
A″A; per cosiffatta convenzione, abbiamo punteg-
ti de' paralleli e della curva GG′G″ che son dietro
dro. Ciò nullameno sempre si potrà costruire il me-
ecè la cognizione di una generatrice qualunque, poi-
cercare i punti nei quali un piano come ZOB taglia
paralleli descritti da'punti GG′G″, daremo, in seguito
un esempio di questa operazione.

superficie delle quali ci occupiamo qui ammettono FIG. XXX
naniera di generazione che importa conoscere. Impe-
ni piano perpendicolare all'asse DZ dà per sezione un
l cui centro è su quest' asse (*n.* 75) il quale ha un
comune colla curva GG′, ovvero col meridiano BB′,
nque considerare la superficie di rivoluzione come *il*
le diverse posizioni che prende un cerchio movibile
perpendicolare alla retta DZ, ed il cui centro percorra
tta, mentre che il suo raggio varia in maniera che
ferenza si appoggi costantemente sulla curva fissa
: questa linea diviene allora una direttrice, alla quale
ostituire il meridiano BB′B″; ed il cerchio movibile è
eratrice variabile nella forma non che di sito. Questa
ne, che più facilmente è svolta in analisi (*), offre il van-
che sotto questo punto di vista, tutte le superficie di
one formano una sola specie (*n.* 70) che ammette *una ge-*
e di natura costante; cioè il cerchio movibile sempre per-
lare all'asse, e diretto nel suo movimento dal meridiano il

i vegga l'*Analisi applicata alla geometria delle tre dimen-*
ap. XIV.

quale cambia soltanto da una superficie particolare ad un'altra.

79. Per la qual cosa secondochè si adotterà per meridiano una retta, una ellisse, una iperbole o una parabola, si otterrà *un cilindro, un'ellissoide, un'iperboloide, o un paraboloide di rivoluzione*, ben inteso frattanto che l'asse di rotazione coincida con uno de' diametri principali della curva; perciocchè in caso diverso la superficie, quantunque sempre di rivoluzione, sarebbe di una specie più astrusa. Un cerchio per esempio il quale girerebbe intorno ad una retta situata nel suo piano, ma non distesa pel suo centro, produrrebbe *un toro* ch' è un genere di superficie anulare, la quale avremo occasione di studiare quanto prima (*n. 138*).

80. Questi diversi esempi, ad eccezione dell'ultimo, non sono ancora che casi particolari di superficie più generali, le quali comechè non sieno di rivoluzione, ci diverranno utili in seguito, ed è importante conoscerne la generazione. Queste sono *le superficie di secondo grado* che offrono *cinque generi* diversi, senza noverare i coni, i cilindri ed i piani, che ne sono variazioni molto semplici per intrattenercene nuovamente.

FIG. XXXIV

81. *Ellissoide*. Sia una ellisse ACDF costrutta su i semi-assi $OA = a$, $OC = c$: supponendola tracciata in un piano verticale che prenderemo per quello del quadro sul quale la superficie sarà rappresentata in prospettiva, ne risulterà che le linee *punteggiate* indicheranno le porzioni della curva situate dietro il piano di siffatta ellisse, alla quale ipotesi ci atterremo in tutto quanto il capitolo. Se in un piano perpendicolare ad OC si costruisca un'altra ellisse $A'B'D'$, che abbia per suoi semi-assi l'ordinata $O'B' = a'$ della prima, ed una retta $O'B' = b'$ comunque grande, ma perpendicolare ad $O'A'$; poscia facciasi muovere la curva $A'B'D'$ di maniera che i suoi assi, restando paralleli a sè medesimi, conservino il rapporto primitivo $\frac{b'}{a'}$ ed uno di essi coincida successivamente con le corde $D'A'$, $D''A''$, DA, ... dell' ellisse fissa CAF; allora il luogo geometrico così generato sarà la superficie dell' *ellissoide*. Quando il piano dell' ellis-

ovibile passerà pel centro O, questa curva giungerà alla nassima grandezza, poichè il semi-asse variabile a' diverrdinata massima $OA=a$; e se rappresentasi con $OB=b$ la iezza che prenderà nello stesso tempo il secondo asse b', linee

$$AD=2a,\ BE=2b,\ CF=2c$$

no, come han nome *gli assi, o i diametri principali* delsoide. Inoltre si scorgerà che la superficie sarà chiusa da tutande, perocchè di là de' punti C ed F, l'ellisse movibile be immaginarî i due assi (*).

Se l'ellisse generatrice $A'B'D'$ fosse un cerchio, cioè se fosse dato eguale ad $O'A'$, la superficie diverrebbe *(n. 78)* *issoide di rivoluzione*, che avrebbe per meridiano la curva rice CAF; e due de'diametri principali, cioè OA, ed OB, bero eguali fra essi: finalmente nel caso in cui i tre assi B, OC fossero tutti della stessa lunghezza, l'ellissoide traebbesi in una sfera.

Iperboloide ad una falda. Sostituiscasi all'ellisse direttrice ›erbole $A'A''A$ il cui semi-asse reale sia $OA=a'$ e l'immao $OC=c$; di poi in un piano perpendicolare ad OC e su ssi, uno de'quali sia la corda $A'D'$ dell'iperbole, costruancora una ellisse $A'B'D'$; facendola muovere colla stessa del caso precedente genererà l'*iperboloide ad una falda*, hiamato perciocchè questa superficie non avrà evidente· che una falda sola, ma indefinita come l'iperbole diret- FIG. XXXV

Quando il piano dell'ellisse movibile passerà pel centro ıgnerà al suo *minimo*, poichè l'asse variabile $D'A'$, sarà ıto eguale a DA, ch'è la più piccola corda dell'iperbole,

---

(*) Esprimendo coll'analisi questa maniera di generazione si otterl'equazione dell'ellissoide riferito a'suoi assi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

ga l'*analisi applicata alla geometria delle tre dimensioni*, ca- ıx.

perciò appunto la curva ABDE è detta *ellisse della gola;* e le tre rette

$$AD=2a,\ BE=2b,\ CF=2c$$

sono i *tre assi* dell'iperboloide: l'ultimo de' quali CF non incontrando la superficie, è detto l'asse immaginario, quantunque, a parlar con precisione, la quantità reale $2c$ non è che il coefficiente dell'espressione immaginaria fornita dall'analisi, allora che si van ricercando i punti della superficie, che sarebbero situati sulla retta indefinita OCO′ (*).

84. Quando i due assi *reali* OA, ed OB sono eguali, l'iperboloide è di rivoluzione (*n.* 78), poichè allora l'ellisse generatrice A′B′D′ diviene un cerchio; sicchè, in questo caso particolare, la superficie potrebbe esser generata dalla rivoluzione della iperbole AA′A″ *intorno al suo asse immaginario* OCO′.

FIG. XXXVI. 85. *Iperboloide a due falde.* Sopra i semi-assi OA$=a$, OC$=c$ costruiscasi di nuovo una iperbole, ma situata in maniera che OC sia l'asse reale: poscia si faccia muovere come precedentemente l'ellisse A′B′D′; questa genererà un'altra specie d'iperboloide, che avrà due falde indefinite, una separata dall'altra per un intervallo in cui non esisterà alcun punto della superficie. In effetto, tra i punti C ed F, la corda variabile A′D′, che serve di asse all'ellisse movibile, diverrà immaginaria, e lo stesso avverrà necessariamente del secondo asse O′B′ che deve serbare col primo un rapporto costante: di maniera che la generatrice, trovandosi totalmente immaginaria in questo intervallo, non somministrerà verun punto reale per la superficie. Nondimeno siccome pel punto O ben si conosce che il semi-asse O′A′ diverrà eguale ad OA.$\sqrt{-1}$, se si voglia costruire il coefficiente reale dell'altro asse ch' è parimente immaginario, farà d'uopo por-

(*) L'equazione dell'iperboloide ad una falda riferita a'suoi assi è

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

perpendicolare al piano AOC una lunghezza

$$\frac{O'B'}{O'A'}=\frac{OB\sqrt{\ \ \ -1}}{OA\sqrt{\ \ \ -1}}=\frac{OB}{OA}:$$

te AD$=2a$, BE$=2$, OB$=2b$ saranno gli *assi* iperboloide a due falde mentre CF$=2c$ n'è il

uest' iperboloide fosse di rivoluzione, farebbe due assi *immaginari* OA, ed OB divenissero iesta ipotesi menerebbe alla relazione O'A'= a l'ellisse generatrice in un cerchio. Allora la e essere generata dalla rivoluzione de' due rami della iperbole primitiva, *intorno del suo asse*

le ellittico. Ora adottiamo per direttrice fissa FIG. XXXVII OA'', facendo muovere perpendicolarmente al ellisse A'B'D' il cui asse maggiore O'A'$=a'$ sia e di questa parabola, e l'asse minore O'B'$=b'$ ına grandezza arbitraria, ma conservi sempre ıpporto costante. In questo movimento, l'ellisse à una superficie composta da una sola falda o di OX, e che si chiama *paraboloide ellitti*. te le sezioni piane che vi si possono tracciare ıbole o ellissi. (**)
ue assi dell'ellisse generatrice sono eguali, *a di rivoluzione* (*n.* 78), *ed allora* potrebbe

---

ell'iperboloide a due falde, rapportata a' suoi assi, er quello delle z, sarebbe

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

i questo paraboloide, rispetto *al suo vertice* ed al- asse delle x, è

$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{p'}=x$$

9

esser generata dalla parabola OA'A'', che si aggiri intorno ad OZ.

FIG. XXXVIII

89. *Paraboloide iperbolico.* Finalmente sempre assumendo per direttrice la parabola D''OA'', surroghiamo all'ellisse generatrice, onde ci eravamo serviti finora, una iperbole D'H', A'G' costruita in un piano perpendicolare ad OZ e co' due semi-assi O'A', O'B' il cui rapporto resterà costante, mentrechè il primo ch' è l'asse reale, diverrà successivamente eguale alle diverse ordinate O'A', O''A''....., della parabola fissa. L'iperbole movibile, scorrendo così parallelamente a se stessa, descriverà primieramente due falde aperte, le quali saran separate dal vuoto interiore del cilindro D''OA'', e si estenderanno indefinitamente, come questa parabola, verso O'X: chè se noi facciamo muovere l'iperbole movibile da O' verso il punto V, il suo asse reale O'A' diminuirà, e diverrà nullo in O; per conseguenza le due falde di cui abbiamo testè cennato si riuniranno, e nello stesso tempo l'iperbole si ridurrà, per questa posizione, a due rette indefinite KOk, LOl, che giaceranno interamente sulla superficie, e saranno parallele agli assintoti di tutte le iperboli precedenti.

Al di sopra del punto O, in O''' per esempio, l'iperbole generatrice ricomparirà, ma in una situazione inversa H'''B'''G''' rispetto a'suoi assintoti. In fatto, gli assi che noi abbiamo rappresentati graficamente con O'A' ed O'B', dovevano essere rigorosamente espressi da

$$a' = O'A', \quad b' = O'B'\sqrt{-1};$$

dunque, poichè in O''' l'ordinata della parabola è immaginaria, ed il primo asse dell'iperbole movibile diviene perciò $a''' = O'''A'''\sqrt{-1}$, fa mestieri che il secondo asse, per conservare coll'altro un rapporto costante prenda la forma

$$b''' = a'''.\frac{b'}{a'} = O'''A'''.\frac{O'B'}{O'A'}$$

quantità reale rappresentata sulla figura da O'''B'''. Ciò mostra che al di sopra di O, l'asse reale O'''B''' dell'iperbole generatrice sarà diretto perpendicolarmente al piano A'OD' e i due

CAPITOLO I. — C...

rami di questa curva d... situate una in avanti d... precedenti lungo le ret... loro insieme una sola s... turo saranno in verso o... scanalatura d'una gire... il nome di *paraboloide*... che tutte le sezioni pia... bole, o iperboli, fra le ... ticolare in cui questa se... che si tagliano (*).

90. È importante oss... non potrebbe mai esser... abbiamo detto sulla nat... curve è mai chiusa e p...

91. La maniera co... del paraboloide iperb... tinuità grafica, perci... serviva da direttrice d... spiega facilmente quest... vare questo modo di ge... re analogia colle super... denominazioni apposte ...

(*) Per ben comprender... noi la supponghiamo tracci... di prospettiva, epperò t... piano. Pria di tutto, è assai... di questo paraboloide con u... sarebbe conducente di con... struirsi facilmente col mezz... legge: vedete i numeri ... del paraboloide iperboli... delle coordinate, ed all'as...

urva descriveranno ancora due falde indefinite,
vanti del piano, l'altra in dietro e riunite colle
le rette KOk, LOl, le quali presenteranno nel
a sola superficie non interrotta, di cui le curva-
verso opposto presso a poco come si vede nella
a girella. Si è dato alla superficie che ci occupa
boloide iperbolico, perciocchè l'analisi insegna
oni piane che vi si possono tracciare sono para-
fra le quali fa d'uopo comprendere il caso par-
uesta sezione è una retta sola, ovvero due rette
*).

nte osservare qui che il paraboloide iperbolico
i essere di rivoluzione; avvegnachè da ciò che
lla natura delle sezioni piane veruna di queste
sa e per conseguenza non può essere circolare.
ra colla quale abbiamo indicato la formazione
iperbolico offre in vero una specie di discon-
perocchè sopra del punto O la parabola che
rice diviene immaginaria; e siccome l'analisi
questa difficoltà, abbiamo preferito conser-
di generazione, tra perchè presenta maggio-
superficie precedenti, e giustifica meglio le
poste a' due paraboloidi, e perchè manifesta

---

rendere la figura 38 fa mestieri tenere a mente, che
tracciata sul piano verticale D''OA'' come quadro
erò tutte le linee *punteggiate* sono dietro questo
è assai difficile di dare una idea chiara della forma
o con un disegno in prospettiva, per la qual cosa
di consultare un modello in rilievo che può co-
l mezzo di fili tesi in linea retta secondo una certa
ri 543 e 554 e la figura 120. In quanto alla equazione
bolico, rapportato al vertice O siccome origine
all'asse OX come asse delle x, è

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{p'} = x$$

chiaramente l'esistenza di due rette OL ed OK situate sul secondo. Non per tanto riterremo ancora un altra maniera di generazione totalmente continua, e comune a'due paraboloidi.

FIG. XXXVII

Sullo stesso asse OX, e su due piani perpendicolari costruite due parabole $A'''OD'''$, $B'''OE'''$ che abbiano lo stesso vertice, i parametri qualunque, e le concavità rivolte nel medesimo verso; poi fate scorrere una delle due parallelamente a se stessa, senza alterarne la forma, ma in maniera che il vertice resti costantemente sull'altra parabola fissa: otterrete così *il paraboloide ellittico.*

FIG. XXXVIII

Prendete due parabole $A''OD''$, $B'''OE'''$, costruite come si è detto, ma con le loro concavità rivolte in verso opposto, poi fate parimente scorrere parallelamente a se stessa la curva $A''OD''$ costante di forma, ed in maniera che il suo vertice percorra l'altra parabola fissa: produrrete così il *paraboloide iperbolico* (*).

92. Per compiere la cognizione de'luoghi geometrici adoperati più di frequente resterebbe a parlare delle *superficie sviluppabili*, e delle *superficie storte*; ma le proprietà caratteristiche di queste due classi di superficie, oltrachè non possono esser chiaramente capite se non dopo considerati i piani tangenti, ci sembra preferibile lasciare al lettore il tempo di rendersi familiari gli esempi finora citati, con applicazioni numerose, o costruzioni svariate; e quindi più innanzi ci occuperemo con ispecialità di queste due classi di superficie importanti.

93. Ritorniamo ora alla quistione indicata al *n. 69*, che aveva per oggetto di rinvenire un metodo per *rappresentare graficamente una superficie.* La quale poichè giusta la definizione generale data *n. 70* è prodotta sempre dal movimento di una data linea, basterà per giugnere allo scopo di *segnare sopra i piani di proiezione alquante posizioni della generatrice, molto numerose ed assai ravvicinate, affinchè questo*

(*) Vedete *l'analisi applicata alla geometria delle tre dimensioni cap. VIII.*

sistema di curve po...
la superficie, la cur...
tra parte fra le gener...
pre una stessa super...
plicità e regolarità, è
meglio giugnere a que...
stesso tempo due siste...
ridiani ed i paralleli n...
vamente con somiglia...
gni in prospettiva, le d...
lato in questo capitolo

94. Inoltre, è ancora
la superficie, cioè le...
del pari che i *contorn...*
proiettati tutt' i punti...
tali limiti; posciachè
lano spesso di una ma...
ti: *pure per apprend...*
predetti, è mestieri fa...
tanto, che quando la f...
principio, possiamo lim...
porre in uso solamente
ne onde abbiamo dati

DE' PIA...

95. Un piano si dic...
dato, *quando contien...*
sono tracciare sopr'...
mostrare che in gener...

ve possa *dipingere agli occhi la continuità della curvatura e l'estensione delle sue falde.* D'al-
generatrici di differente specie che ammette sem-
superficie, si deve preferire quella che per sem-
rità, è la più accomodata a dar figura; e per
e a questo fine, qualche volta si tracciano nello
e sistemi di generatrici, come sarebbero i me-
alleli nelle superficie di rivoluzione. Ed effetti-
omiglianti mezzi abbiamo figurato su'nostri dise-
va, le diverse superficie delle quali abbiamo par-
capitolo.

ancora utilissima cosa di segnare le *tracce* del-
cioè le sue intersecazioni co'piani di proiezione,
contorni dentro o fuori dei quali sarebbero
punti della superficie, almeno allorchè sienvi di
iachè questi contorni sono de' profili, che sve-
na maniera rilevantissima le forme degli ogget-
prendere a determinare con esattezza i contorni
tieri far parola de'piani tangenti. Osserviamo in-
do la forma della superficie ci sarà ben nota da
mo limitarci, per render chiari i nostri disegni, a
amente qualcheduna delle maniere di descrizio-
o dati i particolari.

CAPITOLO II.

E' PIANI TANGENTI IN GENERALE

si dice *tangente* ad una superficie in un punto
*ntiene le tangenti a tutte le curve che si pos-
sopr'essa dal dato punto;* ma è necessario di-
generale, per ogni punto di una superficie, esi-

un piano suscettivo di siffatta proprietà; perciocchè non si
orge *a priori* la ragione onde queste diverse tangenti non
rmano in vece un cono, siccome avviene col fatto in certi
nti *singolari*. Anderemo dunque a dimostrare che *tre curve
alsisieno, tracciate sopra una superficie a partire da un
to punto, hanno sempre le tre tangenti situate in uno stesso
iano.*

Sia G M g la forma e la posizione della generatrice (*n.* 70)
ando passa pel punto M; sia DM *d* una curva tracciata sulla
perficie, e sulla quale dovrà scorrere costantemente la genera-
ice, allorchè col suo movimento descriverà questo luogo geo-
etrico: sia finalmente MX una terza curva *qualunque* situata
nche sulla superficie. Trasportata la generatrice in un'altra po-
zione G′M′g′, incontrerà indubitatamente la curva MX in un
rto punto P′, quante volte il punto M′ sia preso assai vicino
M sulla direttrice DM *d*. Allora congiungendo i punti M, M′, P′
on rette indefinite, queste tre linee saranno secanti le curve
MD, MX, G′g′, e tutte e tre giaceranno evidentemente in uno
tesso piano. Ora facciamo muovere la generatrice G′g′ sopra MD,
avvicinandola alla prima sua posizione Gg; poi immaginiamo che
l piano delle tre secanti giri intorno al punto M, di maniera che
assi contemporaneamente alla generatrice pe' punti M″ e P″,
‴ e P‴, . . . dove a mano a mano taglierà le curve MD ed
X; con ciò *questo piano movibile conterrà costantemente
tre secanti variabili.* Or quando la generatrice sarà ritor-
ata nella posizione GMg, il punto M′ movibile sopra MD sarà
iunto in M: nello stesso tempo il punto P′ della curva MX
vrà dovuto evidentemente riunirsi con M, e per una conseguen-
a necessaria sulla curva variabile G′g′ i punti P′ ed M′ si sa-
anno parimente congiunti: dunque allora le tre secanti movi-
ili saranno divenute rispettivamente tangenti alle curve MD,
X, MG; e tenendo presente che per ogni posizione della ge-
eratrice, esse eran sempre situate in un medesimo piano, se
e conchiuderà che allora quando saran divenute le tangenti MT,
T′, MT″, saranno anche in un solo ed unico piano, il quale

è il limite delle posiz
vibile delle tre secanti

(*) Faro osservare che
sto teorema ...
fin dal ...
considerazioni ...
stessi (n. 108). Infatti
che tutte le tang...
piano unico, è ...
elementi superficiali ...
lineari comuni alle curve
dimostrazione precedente
curva G′g′ è una secante
nell'intervallo, la linea G′
condizione è ordinaria...
come il limite di una se...
tria piana si ammette qu...
tamente, poichè non ...
mente; ma se non ...
taglia una retta, ...
tochè i due punti di secan...
che questo cerchio variabi...
a. Per lo che la perm...
e volerla esigere, sarebb...
generale della tangente
tangente siccome il li...
la quale i due punti di se...
chè sieno essi situati su...
variato di forma e di
questo è appunto ciò che
perficie è essa stessa ...

Aggiungiamo finalm...
tangenti l'una dell'altra...
secanti, abbian cambiato
fino a far coincidere ...
dente che avranno a...
limite delle posizioni ...
muni alle curve secanti.

lle posizioni prese successivamente dal piano mo-
e secanti (*).

---

ervare che a me pareva indispensabile premettere que-
osì dimostrato nelle mie lezioni alla Scuola Politecnica
per potere in seguito prestare al metodo infinitesimale
abbreviate e cotanto utili alle quali ricorreremo noi
). Infatti, non prima di aver provato rigorosamente
ingenti, allo stesso punto di una superficie, sono in un
permesso di considerar la superficie come composta di
ficiali piani, perchè allora sono formati dagli elementi
ai alle curve della superficie e alle loro tangenti. Alla
precedente si è obbiettato che la retta M'P' rispetto alla
ına secante i cui due punti d'incontro si sono riuniti; ma
, la linea G'g' non è rimasta costante di forma, la qual
ordinariamente ammessa quando si definisce la tangente
e di una secante. A ciò basta rispondere che nella geome-
ammetto questa permanenza di forma, quantunque taci-
iichè non vi si considerano che curve date invariabil-
se non uscendo da un piano si traccia un cerchio che
etta, poscia se ne facesse decrescere il raggio fintan-
punti di sezione si riunissero, non vi sarebbe alcun dubbio
erchio *variabile* non sia allora divenuto tangente alla ret-
he la permanenza di forma non è assolutamente necessaria;
sigere, sarebbe un restringere senza bisogno il carattere
ella tangente ad una curva. Fa d'uopo dunque definir la
iccome il limite delle posizioni che prende una secante del-
due punti di sezione si sono avvicinati indefinitamente, pur-
essi situati sullo stesso ramo della curva, nè questa abbia
i forma e di posizione che secondo una legge continua; o
ppunto ciò che avviene qui per la curva G'g', poichè la su-
essa stessa supposta continua:
ıgiamo finalmente che farà d'uopo considerare altresì come
'una dell'altra, due curve qualunque le quali dopo essere state
ıbbian cambiato posizione e forma secondo una legge continua
ır coincidere due de' loro punti d'incontro, perciocchè è evi-
e avranno acquistato una *tangente comune*, la quale sarà il
lle posizioni della retta movibile, che passa pe' due punti co-
e curve secanti.

Inoltre, avendo la curva MX nel caso precedente, una posi-ione arbitraria sulla superficie, ne segue che il piano condotto er le tangenti delle due linee MG ed MD, conterrà la tangente i ogn'altra curva distesa per M; sicchè questo piano sarà an-ho tangente alla superficie, secondo la definizione data al prin-ipio di questo articolo.

96. Quando una superficie presenta due o molte falde che i tagliano, come avverrebbe in un cono la cui base fosse una urva a nodo, i punti di quelle intersecazioni sembra a prima iunta offrano una eccezione alla proprietà di cui gode il piano angente in generale; ma si riconoscerà che questa circostanza ientra ne' casi ordinarî, se si osserva che tutte le tangenti in no stesso punto dell'intersecazione devono essere distribuite ulle due falde, come lo sarebbero sopra due superficie indipen-enti, le quali si tagliassero su questo luogo e ciascuna avrebbe suo piano tangente distinto da quello dell'altra.

97. Non per tanto s'incontrano qualche volta delle vere ec-ezioni alla proprietà del piano tangente; ma ciò non può av-enire che ne' *punti singolari* della superficie, pe' quali la ge-eratrice o la direttrice venendo a ridursi ad un punto unico, *on ammettono più alcuna tangente*. Per esempio al vertice un cono, i diversi lati che vi si tagliano, sono linee rette si-ate sulla superficie e sono esse stesse le loro proprie tangenti; ondimeno queste rette stanno a due a due in piani evidente-ente distinti. Il vertice di un cono è dunque un suo punto ngolare pel quale non esiste piano tangente. Ma laddove si nsideri che la generatrice parallela alla base del cono (*n.*72) restrigne sempre più all'avvicinarsi al vertice, e si riduce un punto giugendovi, il quale a parlar rigorosamente più n ammette alcuna tangente, si concepirà come la dimostra-one generale del *n.* 95 cessa di essere applicabile a questo so particolare. La stessa cagione di eccezione s'incontrereb-partendo dalla definizione data *n.* 71 per le superficie coni-e, poichè allora una delle direttrici della retta movibile sa-bbe il punto unico, detto *vertice* del cono, nè tale direttri-è suscettiva di avere una tangente.

Una circostanza analo
zione, il cui meridiano
ferente dal retto: al p
se di rivoluzione, non vi
diverse posizioni del m
retto. Ciò che si riconos
ad una delle sue corde.

98. È importantissim
tangente, data n. 95 n
un solo punto comune
nelle superficie interam
piano tangente incontra
che tagliarla secondo u
to, come ne vedremo d
superficie storte. Quer
no comprenda le tange
ficie le quali partono d
guenza *toccherà realm*
punti che avrà comuni

99. Pur tuttavolta se
piano ch'è loro tangente
per tutta quanta la lung
fetto il cilindro ABC a
AB e la tangente BT a
che non solo conterrà
vorranno tracciare sull
rebbe dal teorema dim
le tangenti a tutte le alt
punti della generatrice,
basterà far vedere che
alla curva qualunque
no a B conduco il pian
il cilindro secondo una
MX in un punto G sit
no conterrà le due sec

ostanza analoga si presenta nelle superficie di rivolu-
cui meridiano taglia l'asse sotto un angolo nullo o dif-
il retto: al punto di una tale superficie situato sull'as-
luzione, non vi è più piano tangento, e le tangenti alle
osizioni del meridiano formano al contrario un cono
che si riconoscerà facendo girare un cerchio intorno
lle sue corde.

nportantissimo osservare che la definizione del piano
data *n. 95* non richiede assolutamente ch'esso abbia
nto comune colla superficie. Ciò ha luogo, in vero,
rficie interamente *convesse*; ma in altri casi può il
gente incontrare la superficie in diversi punti, ed an-
la secondo una curva che passa pel punto di contat-
e vedremo degli esempî nel *toro (n. 138)*, e nelle
storte. Questo particolare non osterà che cotal pia-
nda le tangenti di tutte le curve tracciate sulla super-
li partono dal punto in quistione, e quivi per conse-
chera realmente la superficie; mentrechè negli altri
vrà comuni con essa, sarà generalmente *secante*.
tuttavolta sono alcune speciè di superficie, in cui il
oro tangente in un punto, è necessariamente tangente
anta la lunghezza di una retta. Consideriamo in ef-
ndro ABC a base qualunque; se per la generatrice
gente BT alla base, si conduca un piano, io dico,
o conterrà esso le tangenti alle diverse curve che si
acciare sulla superficie pel punto B (ciocchè si dedur-
eorema dimostrato *n. 95*), ma comprenderà ancora
tutte le altre curve tracciate sul cilindro, pe' diversi
eneratrice AB; e per giustificare questa asserzione,
edere che il piano ABT contiene la tangente MV
ualunque MX. Or, se per AB ed un punto D vici-
co il piano ABR, questo taglierà evidentemente
condo una retta DE parallela ad AB, e la curva
unto G situato su DE; di maniera che siffatto pia-
le due secanti BDR ed MGS. Ora facciamolo gira-

FIG. XXXII

e intorno ad AB in modo che il punto D si avvicini a B: i
unti di sezione D e G cambieranno di posizione sulle curve,
a sempre si troveranno insieme sopra una retta movibile, co-
antemente parallela ad AB; dunque allora quando uno di
uesti punti D sarà riunito con B, l'altro punto G coinciderà
ello stesso tempo con M; cioè quando il piano movibile avrà
ccupato la posizione ABT, la secante variabile MGS, sempre
tuata in questo piano diverrà la tangente MV; talchè que-
'ultima retta giacerà sul piano ABT.

Conchiudiamo da ciò che *un piano, il quale tocca un cilindro
a un punto qualunque, è necessariamente tangente per tutta
a lunghezza della generatrice rettilinea che passa pel punto
i contatto.*

100. Nelle superficie coniche, il piano tangente gode an-
ora della stessa proprietà, ciocchè si dimostrerà d'una manie-
a conforme, osservando che in questo caso i punti di sezione
D e G sono situati costantemente su d'una stessa retta variabi-
e, imperò incontra sempre AB nel vertice del cono. Finalmen-
e, vedremo più innanzi che questa stessa proprietà sussiste
non meno in una classe di superficie denominate *sviluppabili*
elle quali i cilindri ed i coni sono specie particolari.

101. Ciò non di meno sarebbe un errore il credere che que-
o contatto del piano tangente, per tutta la lunghezza di una
etta, abbia luogo dacchè le superficie onde abbiamo parlato
mmettono generatrici rettilinee; perciocchè incontreremo
uanto prima alcune superficie generate anche da una linea
etta, e dinominate *storte*, nelle quali il piano tangente non
oddisfa alle condizioni del vero contatto, che per solo un pun-
o, quantunque esso contenga tutta intera una retta della su-
erficie (vedete i *n. 142*, e *154*).

102. Il teorema, dimostrato *n. 99*, offre una conseguenza
mportante che avremo spesso a richiamare in seguito, ed è
che *quando su di un piano si proiettano una curva MX e la
ua tangente MV, le loro proiezioni sono reciprocamente tan-
enti l'una dell'altra.* In fatti, per proiettare la curva MX, farà

4) immaginare un cilindro MBCX il quale passi
inea e sia perpendicolare al piano dato, che ta-
o una curva BC la quale sarà la proiezione di MX:
r proiettare la retta MV, farà d'uopo condurre il
il quale poichè ad evidenza è tangente al cilindro
sserlo ancora *(n. 99)* in B, e per conseguenza com-
angente BT condotta alla base BC: la quale però
eazione del piano proiettante con quello di que-
iindi la proiezione di MV.
onseguenza sussisterebbe eziandio, se si proiettasse
sua tangente con rette oblique al piano dato, ma
lele fra loro.
umendo ciò ch'è stato detto intorno a' piani tan-
conchiudersene, che per costruire il piano che
erficie qualunque in un punto dato, basterà quin-
are le tangenti a due curve tracciate sulla super-
o di cui si tratta, preferendo in ciascuno esempio
riranno maggior facilità; farvi di poi passare un
è si eseguirà come al *(n. 22)*. Come prima dare-
sempi di queste costruzioni.
el punto dato, passerà una retta tutta situata sulla
à essa stessa la sua propria tangente, e starà perciò
gente; pure non bisognerà sempre dedurne, che
occa la superficie per tutta la lunghezza di co-
101).
male ad una superficie è la retta perpendicolare
nte condotta dal punto di contatto, che perciò
cilmente *(n. 33)*, determinate che saranno le trac-
che tocca la superficie nel punto in quistione.
veggo opportuno di esporre una regola generale
erminare il *contorno apparente* di un corpo, cioè FIG. XXXIII
para le parti della sua superficie visibili all'osser-
ivisibili. Sia dunque in O l'occhio dello spettato-
imo quanti piani possibili si possan condurre
uperficie proposta per cotal punto; essi la toc-

neranno ne' punti A,B,C... che formeranno una curva cui ter-
ineranno tutt'i raggi visuali OA, OB, OC... tangenti alla su-
erficie; sicchè questa linea ABCD sarà il limite della parte,
he può scorgere l'osservatore colà collocato. Ma questo contor-
o apparente cambierebbe di forma, e di posizione se il punto
veduta si spostasse: ed in atto di esempio sia trasportato in O',
contorno apparente diverrà A'B'C'D'. Farebbe d'uopo dun-
ue assegnare in ciascun caso la posizione del punto di veduta,
eterminare di poi in conseguenza il contorno apparente, il che
arebbe luogo ad operazioni grafiche che apprenderemo, è
ero, ad eseguire nella prospettiva, ma qui intralcerebbero
nutilmente i nostri disegni; mentre conservando l'ipotesi già
mmessa *n. 16*, secondo la quale *il punto di veduta, in ogni
roiezione orizzontale, è posto ad una distanza infinita sulla
erticale OO'* che passa per un punto qualunque dell'oggetto,
piani tangenti, i cui punti di contatto colla superficie facevan
onoscere la curva ABC... diverranno tutti *verticali*, e la loro
leterminazione sarà effettuata per l'ordinario di una maniera
emplicissima, siccome rileveremo ne' disegni seguenti.

106. Risulta da ciò che *il contorno apparente di una super-
ficie proiettata sul piano orizzontale, si conseguisce cercando
punti di contatto di tutti quei piani tangenti i quali son ver-
icali.*

La sua proiezione verticale poi, ha il suo punto particolare di
eduta, ch'è supposto (*n. 16*) *ad una distanza infinita sopra
na perpendicolare al piano verticale*; onde si deduce che il
ontorno apparente, relativo a questa proiezione non sarà lo
tesso di quello riferito al piano orizzontale, ma si conseguirà
ercando *i punti di contatto della superficie con quelli piani
angenti che sono perpendicolari al piano verticale.*

107. Possiamo intanto dar compimento alle regole indicate
n. 15, e 16), intorno il punteggiamento delle linee principali.
a tutto quanto precede discende che le linee o parti di esse, le
uali sopra una superficie qualunque, staranno *in sul contorno
pparente* relativo alla proiezione orizzontale *saranno, sole vi-*

sibili su questa proiezi
parti visibili saranno q
apparente relativo a q
bliare che una med
proiezioni ed invisibile
è differente ne' due ca
scun piano, adoperare c
giamento oramai asse
sempre che le distinzio
ausiliarie (*n. 15, 2.°*)

108. Inoltre ogni vol
piano *indefinito*, tang
col fatto esistesse, ma
darne o trovarne le tra
nasconderebbe quasi
ficie, ciò che produrre
più distinguere su di
parti superiori, o ant
forma degli oggetti sa
fico. Questa restrizio
nanzi, senza bisogno

C

DEI PIANI TA

109. *Per un punto d
lunque, condurgli un*
Sia AECG la diretr
nel piano orizzontale,
il metodo sarà general
ancora (*ab, a'b'*) la re
lari costantemente pa

sta proiezione; in quanto al piano verticale, *le sole* saranno quelle che giaceranno *avanti del contorno* elativo a quest' ultimo piano. Ma non si dovrà ob- la medesima linea potrà essere visibile in una delle invisibile nell'altra, perciocchè il punto di veduta ne' duo casi: di maniera che farà mestieri su cia- doperare con discernimento i due modi di punteg- mai assegnato *per le linee principali*, ricordando e distinzioni precedenti non si applicano alle *linee* *15, 2.°*)

e ogni volta che in un disegno sarà figurato un *ito*, tangente, o secante *non lo terremo siccome*] *tesse*, ma supporremo che siasi voluto *solamente* *rne le tracce;* poichè in diverso caso questo piano e quasi sempre una gran parte, o tutta la super- produrrebbe il grave inconveniente di non lasciare re su di essa, oggetto principale del disegno, le i, o anteriori dalle loro opposte: in guisachè la oggetti sarebbe meno rimarcata nel disegno gra- restrizione dovrà sempre sottintendersi d' ora in- bisogno di rammemorarla volta per volta.

CAPITOLO III.

'IANI TANGENTI AI CILINDRI, ED AI CONI.

FIG. XXXIX

punto dato sulla superficie di un cilindro qua- rgli un piano tangente.

a direttrice del cilindro, che supponiamo situata ontale, e quantunque tal linea sia qui un cerchio, generale ed applicabile ad ogni altra curva; sia $5'$) la retta cui la generatrice rettilinea deve ser- nente parallela scorrendo sopra AECG. Comince-

emo dal determinare il contorno apparente della superficie che,
ul piano orizzontale, daranno (*n.* 106) i punti di contatto di tut-
i piani tangenti *verticali*. Or, ogni piano di questa specie con-
enendo un lato (*) del cilindro, avrà per traccia orizzontale la
roiezione stessa di questa retta, cioè una parallela ad *ab*; dip-
iù detto piano toccherà il cilindro per tutta la lunghezza di
uesta generatrice (*n.* 99), e per conseguenza la sua traccia
ovrà esser tangente alla base AECG; dunque se si conducano
questa curva le tangenti AB e CD parallele ad *ab*, saran queste
e tracce dei piani tangenti verticali, e nello stesso tempo le
roiezioni orizzontali delle loro linee di contatto, che saranno
e due generatrici (AB, A'B') e (CD, C'D'). Ondechè queste
lue linee formeranno il contorno apparente del cilindro sul
piano orizzontale, ed ogni lato di esso che sarà *al disotto* di que-
te rette, cioè che anderà a terminare sul semicerchio AGC
arà invisibile in proiezione orizzontale.

Il contorno apparente poi sul piano verticale, sarà determi-
ato (*n.* 106) dai piani tangenti ad esso perpendicolari; le
oro tracce orizzontali dovranno dunque esser perpendicolari
lla linea della terra, e tangenti come si è detto sopra alla base
ECG, epperò saranno EE' e GG'. In seguito, poichè questi
iani toccheranno necessariamente il cilindro secondo le gene-
atrici EF e GH, le cui proiezioni verticali sono E'F' e G'H'

(*) Qualche volta, per render semplice il linguaggio, chiameremo lati
i un cilindro o di un cono le diverse posizioni della generatrice ret-
linea; pure non bisogna mai dare a queste rette il nome *di elementi*,
erciocchè gli elementi di una grandezza devono essere sempre ad essa
mogenei: così gli elementi di una superficie sono altre piccole super-
cie il cui aggregato compone la superficie in quistione. Inoltre sarà
estieri più innanzi (*n.* 159) di adoperare questo vocabolo di *elemento*
lla sua vera accezione, ed allora risulterebbe da questo doppio signi-
cato una confusione d'idee assai nociva nella teorica delle superficie
orte. Qualche volta adopreremo ancora il vocabolo di base per dino-
re la direttrice di un cilindro, o di un cono, particolarmente quando
esta curva è situata sul piano orizzontale.

parallele ad a'b', que
parente della superficie
lati indietro di queste r
EAG saranno invisib

110. Ora rimane
la proiezione orizzo
sulla superficie, non
seconda proiezione, p
fatti, pel punto in qu
una generatrice che
ML parallela ad ab; m
cilindro in L, dunque
zontale di questo lato. I
seguenza L'K' parall
M su L'K' si consegui
assegnato sul cilindro.

Esiste nonpertanto
tagliando la base in d
traccia di un altro lato
la proiezione vertica e
M vien riferito sopr' ess
punto (M,M'') che sar
zontalmente in M.

111. Ciò premesso,
(M,M'). Questo piano
e per conseguenza la s
poi avendo a toccare
mentovata generatrice
tangente della base al
cisamente la traccia or
nere l'altra traccia,
(ML, M'L'), contenu
ticale, e QK' sarà la
se avviene come nel
tagliare la linea della

$r'b'$, queste due rette formeranno il contorno ap-
superficie sul piano verticale; di maniera che tutt'i
i queste rette, le quali termineranno al semicerchio
invisibili in proiezione verticale.

isolviamo il problema proposto, assumendo M per
orizzontale del punto dato, e poichè deve giacere
ie, non bisognerà scegliere arbitrariamente la
zione, percioechè questa si deduce da quella. In
to in quistione sul cilindro, passa necessariamente
ice che sarà proiettata orizzontalmente secondo
ad *ab;* ma ML muove ad incontrare la base del
dunque siffatto punto dovrà essere la traccia oriz-
sto lato, la cui proiezione verticale sarà per con-
$'$ parallela ad $a'b'$; talchè, proiettando il punto
conseguiranno le due proiezioni M ed M$'$ del punto
cilindro.

ertanto una seconda soluzione; poichè la retta ML
ase in due punti L e V, possiam dire che V è la
altro lato proiettato egualmente su MV, ma di cui
verticale sarebbe V$'$K$''$; di guisa che se il punto
o sopr'essa in M$''$, vi sarà sul cilindro un secondo
) che sarà come il primo (M,M$'$) proiettato oriz-
n M.

remesso, si costruisca il piano tangente pel punto FIG. XXXIX
sto piano comprenderà la generatrice (ML,M$'$L$'$)
enza la sua traccia passerà pel piede L di quella;
toccare il cilindro per tutta la lunghezza della
neratrice *(n. 99)*, conterrà necessariamente la
a base al punto L, cioè la linea LQ, che sarà pre-
traccia orizzontale del piano dimandato. Per otte-
traccia, si cercherà il punto K$'$ in cui la retta
contenuta in questo piano, va ad incontrare il ver-
' sarà la traccia verticale del piano tangente. Ma
me nel nostro disegno, che la traccia PQ vada a
ea della terra ad una distanza considerevole, s'im-

maginerà condotta nel piano tangente, pel punto (M,M') una,
orizzontale ausiliaria della quale le proiezioni saranno eviden-
emente MX parallela a PL, ed M'X' alla linea della terra; po-
cia costruendo il punto X' in cui questa orizzontale va ad in-
contrare il piano verticale, dovrà questo punto appartenere ancora
lla traccia verticale del piano tangente; la quale sarà X'K'.
n tutti i casi siffatto mezzo è utile adoperarsi come prova.

In quanto al piano tangente relativo al punto (M,M'), si os-
erverà che il lato di contatto è qui proiettato su MV, M''V';
dunque conducendo pel piede V di questa retta una tangente
VS alla base del cilindro, sarà essa la traccia orizzontale di
questo nuovo piano tangente. La traccia verticale SK'' si de-
erminerà, come qui sopra, cercando il punto K'' in cui il lato
di contatto incontra il piano verticale; ovvero si adoprerà la
orizzontale (MY, M''Y') che somministrerà un terzo punto Y'
di questa traccia.

112. Osserviamo inoltre che i due piani tangenti PQR' e
PSR' or ora costrutti, comprendono due generatrici del cilindro
che sono parallele tra loro; talchè questi piani non potranno
agliarsi che secondo una retta parallela a cosiffatti lati. Per
onseguenza se si costruisce (*n.* 27) l'intersecazione (PR, P'R')
de' predetti due piani, questa retta dovrà venire esattamente pa-
allela ad (*ab*, *a'b'*), ciocchè profferirà una novella prova
elle operazioni grafiche precedenti.

113. Per le dettate cagioni *n. 108*, ci siamo proposti, nel
resente disegno, non già di considerare come se realmente
sistessero i piani tangenti; ma di costruirne solamente le trac-
e, le quali poichè sono esistenti, farà mestieri *punteggiare* le parti
ne si trovano nascoste dalla proiezione del cilindro sul piano
rizzontale e sul verticale. Trattanto dei diversi lati del cilin-
ro noi avremmo potuto punteggiare quelli che avevano servi-
come linee *ausiliarie* per pervenire a' piani tangenti; pure
bbiamo preferito di riguardare tutte queste rette come altret-
nte *generatrici* il cui insieme meglio addimostra la forma
ella superficie, e che perciò han dovuto esser segnate con un

tratto *pieno* o *punteg*
qual distinzione si e
n. 109.

114. Se si vuole co
dro penetra il piano ve
diverse generatrici di c
F'K'D'H'K''B', che
toccare ne' punti K',
chè questi comprendo
situate sul cilindro, e
di contatto. Per ottener
curva F'K'D'H' . . .
generatrici che corrisp
gente è parallela alla l
di queste generatrici,
il piano verticale sec
alla linea della terra,
niera che questa interse
riamente la curva F'K'
o il più basso.

115. Aggiungiamo
gnato per la direttrice d
nello spazio e determin
fissi, si avrebbe potuto
rando pei diversi punti
retta (*ab*, *a'b'*), e cercar
zontale; e sarebbesi tro
posta immediatamente.

116 *Condurre un pia*
dato fuori di esso.

Conserviamo pel cilind
il punto assegnato nello
rallelamente alle generat
dentemente esser conte
posciachè, qual' esso si

ieno o punteggiato, secondochè erano visibili o no, la
stinzione si effettuerà secondo la regola enunciata al

Se si vuole costruire la curva secondo la quale il cilin-
tra il piano verticale, basterà cercare le tracce delle
generatrici di questa superficie, e si otterrà così la linea
I'K''B', che nel tolto esempio sarà un'ellisse, e dovrà
ne'punti K', K'', le tracce de'due piani tangenti, poi-
ti comprendono (*n.* 99) le tangenti di tutte le curve
il cilindro, e condotte pei diversi punti del loro lato
o. Per ottenere il punto *più alto* ed *il più* basso della
K'D'H'..., sarà sufficiente di costruire le due
ci che corrispondono ai punti della base in cui la tan-
arallela alla linea della terra; stantechè per ciascuna
generatrici, il piano tangente corrispettivo taglierà
erticale secondo una retta evidentemente parallela
della terra, e per conseguenza *orizzontale*; di ma-
questa intersecazione, che per altro toccherà necessa-
curva F'K'D'H'..., ne indicherà il punto più alto
sso.
giungiamo finalmente che se si fosse dapprima asse-
a direttrice del cilindro, una curva qualunque situata
e determinata dalle sue due proiezioni su i piani
ebbe potuto ridurre questo caso al precedente, ti-
versi punti di questa curva alquante parallele alla
'), e cercando le tracce di questi lati sul piano oriz-
rebbesi trovata la base AELG che noi ci siamo pro-
atamente.
*rre un piano tangente ad un cilindro, per un punto
esso.*
o pel cilindro gli stessi dati precedenti, e sia (N,N') FIG. XXXIX
nato nello spazio; pel dato punto condurremo pa-
lle generatrici una retta (NP,N'P') che dovrà evi-
sser contenuta tutta nel piano tangente cercato,
al'esso sia, conterrà un lato del cilindro. Dunque

costruendo la traccia orizzontale P di questa retta, si otterrà un punto della traccia del piano dimandato; la quale dovendo toccare la base del cilindro (*n.* 99), sarà una delle tangenti PLQ e PVS, che le si posson condurre pel punto P. Vi saranno però due piani che risolveranno il problema, e le tracce loro verticali si otterranno facilmente, poichè ciascuno di essi comprenderà le rette (PN, P'N') ed il lato che parte dal punto di contatto L o V (*). D'altro canto si potrebbe ancora, come nel (*n.* 111), immaginare pel punto dato (N, N') una orizzontale situata nell' uno o nell'altro de' piani tangenti, e costruirne la traccia verticale.

117. *Trovare un piano che sia tangente ad un cilindro e parallelo ad una retta data.*

Sia AECG la base del cilindro sul piano orizzontale, ed (EF, E'F') una delle generatrici; si costruirà il contorno apparente di questa superficie su i due piani fissi come al *n.* 109: poscia se si rappresenti con (*mn*, *m'n'*) la retta data, farà d'uopo per un suo punto condurre una parallela (*ma*, *m'a'*) alle generatrici del cilindro, e far passare un piano per queste due rette; il quale avendo per traccia orizzontale *an*, dovrà esser parallelo al piano tangente, perocchè contenendo questo un lato del cilindro è necessariamente parallelo alle due rette proiettate in *ma* ed *mn*; sicchè la sua traccia sarà una delle due tangenti PQ, o TS condotte alla base parallelamente ad *an*. Per la qual cosa vi saranno due soluzioni ancora, e le tracce verticali QR', SV' si otterranno facilmente per mezzo de' lati di contatto che saranno (PR, P'R') per uno de' piani, e (TV, T'V') per l'altro. Qui i due

---

(*) Avviene qui che i punti di contatto L e V sono su di una stessa parallela alla retta *a b*, poichè abbiamo voluto adoperare la figura del problema precedente; ma quando si prenderà il punto (N, N') all'intutto arbitrariamente, questa circostanza non avrà luogo generalmente, nè ciò per altro cambierà nulla a' ragionamenti che ci han guidati a risolvere questo problema.

piani tangenti saranno
guenza le loro tracce
lele l'una all'altra.

118. Nel terminare
non potersi esigere che
perficie e passasse
rocchè se un piano
veduto *n.* 99, è di forza
per esso; di maniera ch
de implicitamente altre
deve aver contatto con
vi si aggiunga l'altra d
punti dati al di fuori, si
dove tre sono sufficienti
no. Nondimeno, se la
dro, ciò varrebbe lo st
lo, ed il problema si ri

119. *Per un punto*
durle un piano tangent

Sia ACBD la curva d
no orizzontale, ed (S,
col determinarne il con
cercando (*n.* 106) tutt
quali avendo per tracc
generatrice, che vi si c
to S; poscia avendo a t
luogo il contatto del pi
ghezza di una generatri
SA, ed SB, condotte d
cali tangenti il cono se
le quali formano il con
orizzontale. Di maniera
to delle summentovate
della base, sarà invisib

saranno evidentemente paralleli, e per conse-
tracce verticali dovranno trovarsi anche paral-
tra.

minare questi problemi su i cilindri, osserviamo
ere che un piano fosse tangente ad una tale su-
sso nello stesso tempo per una retta data. Impe-
iano tocca un cilindro in un punto, come si è
di forza tangente lungo la generatrice che passa
miera che questa prima condizione ne compren-
nte altre due, secondo le quali il piano cercato
tto con due punti della superficie: che perciò se
l'altra di passare anche per una retta o per due
fuori, si avranno *quattro* condizioni distinte, lad-
sufficienti per determinare la posizione di un pia-
), se la retta data fosse parallela a'lati del cilin-
bbe lo stesso che se fosse assegnato un punto so-
ma si ridurrebbe a quello del *n. 116.*

*n punto dato sopra una superficie conica con-
tangente.*

a curva direttrice che supponiamo situata nel pia- FIG. XXXXI
, ed (S, S') il vertice del cono; comincereino
ne il contorno apparente sul piano orizzontale,
106) tutt'i piani tangenti verticali. Ciascuno dei
per traccia orizzontale la proiezione stessa della
e vi si conterrà, passerà questa traccia pel pun-
endo a toccare la base, perciocchè qui ancora ha
to del piano tangente (*n. 100*) per tutta la lun-
generatrice, se ne conchiuderà che le tangenti
ondotte dal punto S, son le tracce de'piani verti-
cono secondo i due lati (SA, S'A') ed (SB, S'B'),
no il contorno apparente relativamente al piano
maniera che ogni generatrice che sarà al di sot-
entovate, cioè che terminerà nella porzione ADB
à invisibile sul piano orizzontale.

Il contorno apparente sul piano verticale, sarà dato da' piani
angenti al cono perpendicolari a questo piano di proiezione
n. 106); sicchè le tracce orizzontali di cotali piani dovendo es-
ere perpendicolari alla linea della terra, e tangenti, come si è
etto, alla base ACBD, saranno le rette CC' e DD'. Inoltre poi-
hè questi piani toccheranno evidentemente il cono secondo le
eneratrici (CS, C'S') e (DS, D'S'), ne segue che queste rette
ormeranno il contorno apparente della superficie proiettata sul
iano verticale; e per conseguenza ogni lato che starà indietro
quello o terminerà nella porzione CAD della base, sarà invi-
ibile in proiezione verticale.

120. Ritorniamo adesso al problema primitivo, e supponia-
no che M sia la proiezione orizzontale del punto dato. L' altra
roiezione non deve esser presa arbitrariamente; perocchè il
unto in quistione appartiene alla superficie, e deve trovarsi
u d' una generatrice la quale non può essere proiettata orizzon-
almente che secondo SM; questa retta avrà dunque per trac-
ia orizzontale il punto E, o l' altro G, e quindi la sua proie-
ione verticale sarà S'E', o S'G'. Se dunque vi si riferisce la
roiezione M con una perpendicolare alla linea della terra, si ot-
erranno le due soluzioni (M,M') ed (M,M'') pel punto assegnato.

121. Premesso ciò, costruiscasi il piano tangente pel primo
i questi due punti, un tal piano comprenderà la generatrice (SE,
'E') e toccherà il cono per tutta quanta la lunghezza di questa
etta (*n. 100*); perlocchè avrà per traccia orizzontale la tan-
ente PEQ alla base. La sua traccia verticale dovrà passare
el punto (F,F') in cui il lato di contatto va a penetrare il pia-
o verticale, e per l'altro Q dove la traccia PE anderebbe a ta-
liare la linea della terra: ma siccome questo punto Q è qui fuo-
del quadro, vi si supplirà immaginando, pel punto (M,M')
nel piano tangente cercato, una orizzontale (MX,M'X'), la
uale andando a penetrare il piano verticale in X' somministre-
 così un nuovo punto della traccia dimandata QX'F'.

Parimente pel punto (M,M''), il lato di contatto essendo (SG,
'G'), la tangente GV sarà la traccia orizzontale del piano tan-

gente attuale; e l
punto F'', in cui il
il piano verticale: e
una orizzontale (M
le ci occuppiamo.

122. Osserviamo
minati, comprenden
saranno ambedue p
costruisca (*n. 27*) la
secondo PR, e P'R
passa per S, e l'altr
cazione delle costru
cali dovranno toccar
il cono è tagliato d
i punti in cui le dir
piano di proiezione.

123. *Condurre un*
per un punto dato a

Sia anche ABC la b
minerà, come si è prat
perficie su ciascuno d
il punto assegnato ne
dovendo contenere u
e per conseguenza c
tracciando il piede (P
PEQ, e PGV alla bas
due piani tangenti c
alle tracce verticali.
(SN,S'N') conterrà i
co'medesimi, quali s
Si potrebbe adopera
dotta da ciascun pian
fatto altre volte.

124. *Trovare un pi*
lelo ad una retta dat

; e la verticale VF'' si determinerà cercando il
cui il lato di contatto (GS,G'S') va ad incontrare
:ale: ovvero si farà uso come precedentemente, di
e (MY,M''Y') situata nel piano tangente del qua-
ımo.
viamo qui che i duo piani tangenti, da noi deter-
endendo ciascuno una generatrice del cono, pas-
due per il vertice (S, S'); da cui risulta che se si
27) la loro intersecazione, la quale è proiettata
e P'R' ne avverrà che la prima di queste linee
ı l'altra per S', ciocchè somministrerà una verifi-
costruzioni precedenti. Oltrachè le tracce verti-
toccare in F' ed in F'' la curva secondo la quale
ıto dal piano verticale, e che si costruirà cercando
le diverse generatrici vanno ad incontrare cotal
:zione.

ırre un piano tangente ad una superficie conica dato al di fuori.

ΛBC la base del cono ed (S, S') il vertice; si deter- FIG.XXXXII
si è praticato di sopra il contorno apparente della su-
ıscuno de' piani fissi, e rappresenteremo con (N,N')
;nato nello spazio. Il piano tangente che si cerca,
enere una generatrice, passerà pel vertice (S, S')
ıenza conterrà la retta (SN, S'N'); dunque rin-
piede (P, P') di questa, e conducendo le tangenti
alla base, queste saranno le tracce orizzontali dei
genti che soddisferanno alla quistione. Inquanto
rticali, esse si determineranno per mezzo della retta
tenuta ne' due piani, ovvero per via de' lati di contatto
quali sono evidentemente (SE,S'E') ed (SG,S'G').
doperare ben anche una orizzontale ausiliaria con-
:un piano pel punto (N, N') siccome abbiamo già
lte.

ıre un piano che sia tangente ad un cono, e paral- etta data.

Conserviamo i medesimi dati precedenti, e sia $(mn, m'n')$ la etta alla quale il piano tangente dev' essere parallelo. Poichè uesto piano passerà necessariamente per il vertice, se da questo unto conduciamo parallelamente ad $(mn, m'n')$ la retta (SP, S'P'), arà questa evidentemente contenuta nel piano dimandato; per onseguenza la sua traccia (P, P') apparterrà alla traccia orizontale del piano tangente, la quale sarà una delle due tangenti EQ, PGV condotte alla base. Vi saranno dunque ben anche ue soluzioni, e le tracce verticali di questi piani si determineanno come nel numero precedente.

125. Poichè ogni piano tangente ad una superficie conica a un punto la tocca necessariamente per tutta la lunghezza di na retta (*n.* 100), l'osservazione fatta al *n.* 118 si applica qui, e ne risulta che non potrebbe richiedersi che un piano sia tangente d un cono e passi nel tempo stesso per una retta o per due unti dati, salvo che la retta la quale riunisce questi due punti assasse pel vertice; perocchè allora non sarebbe assegnato che n punto solo (*n.* 123).

Terminando questo capitolo, aggiungeremo qualche proble-na del quale indicheremo solamente le vie di soluzione.

126. *Per una retta data condurre un piano che faccia con ' orizzontale un certo angolo* α. Da un punto qualunque della etta si abbasserà sul piano orizzontale una perpendicolare ed n' obbliqua, dirigendo questa parallelamente al piano vertiale, ed in modo che la sua proiezione sopr' esso formi l'anolo α colla linea della terra. Allora immaginando che questa bbliqua giri intorno della verticale, descriverà un cono retto cui traccia orizzontale sarà un cerchio ben facile a determiare, ed i cui lati saranno tutti inclinati all' orizzonte per una uantità angolare α; talchè se a questo cono si conduce un pia- tangente che passa per la retta data, cioè rivolgersi al proema del *n.* 123; si otterrà evidentemente un piano che sodsferà alle condizioni assegnate dalla quistione.

127. *Condurre ad un cilindro dato, un piano tangente la cui clinazione sul piano orizzontale sia* α Si costruirà come nel

problema precedente
l' angolo α col piano
retta parallela alle g
per essa un piano ta
durre al cilindro un p
quale problema si ris
base del cilindro una
del piano che tocca a
ma diverrà impossibil
del cono ausiliario at

Se si proponesse *l*
qualunque, farebbe d
zione prendendosi per
stesso che serve di ve
blema; di poi si dov
basi di questi due c
tale del piano dima

128. *Per un pun gente ad una super*

Si costruirà prim
pel punto che asseg
piano con un altro c
te al dato; la inter
nistrerà una retta c

C

DEI PIANI TANGE

DAT

129. Poichè per o
rivoluzione (*n.* 75)
parallelo FMG, se si

edente un cono di rivoluzione i cui lati facciano
piano orizzontale; poscia tirando pel vertice una
alle generatrici del cilindro, e facendo passare
ıno tangente al cono (*n.* 123), rimarrà a con-
ro un piano tangente parallelo allo anzidetto; il
a si risolverá come al *n.* 117, conducendo alla
ro una tangente parallela alla traccia orizzontale
occava il cono. Ben si comprende che il proble-
ɔossibile quando la parallela, condotta pel vertice
ario andrà a cadere nell'interno della sua base.
aesse *lo stesso quesito per un cono* dato a base
rebbe d'uopo apportare de'cambiamenti alla solu-
dosi per vertice del cono di rivoluzione quel punto
ve di vertice alla superficie conica data dal pro-
ı si dovrebbe condurre una tangente comune alle
i due coni, la quale sarebbe la traccia orizzon-
ı dimandato.

*ın punto dato, condurre una retta che sia tan-
: superficie conica e parallela ad un piano dato.*
à primamente un piano che tocca il cono e passa
ə assegna la quistione; in seguito si taglierà questo
altro condotto da quel punto stesso parallelamen-
a interseeazione de'due piani così costrutti sommi-
retta che soddisferà al quesito.

CAPITOLO IV.

TANGENTI ALLE SUPERFICIE DI RIVOLUZIONE, DATO IL PUNTO DI CONTATTO.

FIG. XXXIII

ıè per ogni punto M preso sopra una superficie di
n. 75) passa sempre un meridiano AMD ed un
G, se si costruiscano le tangenti MT ed MV a que-

ste curve, e si conduca un piano per cotali due rette, sarà (*n. 103*) desso il piano tangente alla superficie in M. Or la tangente MV, situata nel piano del cerchio FMG è evidentemente perpendicolare tanto al raggio MO quanto all'asse AO; epperò lo è ancora al piano meridiano AOM, laonde il piano tangente che conterrà MV, sarà perpendicolare al meridiano. Questa conseguenza essendo indipendente dalla natura della curva AMD, e dalla posizione del punto M, ne risulta questo teorema riguardevole: *In ogni superficie di rivoluzione, il piano tangente è sempre perpendicolare al piano meridiano che passa pel punto di contatto.*

130. Conducendo pel punto M una normale MN alla superficie, questa retta perpendicolare al piano tangente, sarà necessariamente compresa nel piano meridiano AMD; dunque in ogni superficie di rivoluzione *la normale va ad incontrare l' asse.*

Oltracciò questo incontro avviene allo stesso punto per tutte le normali MN,PN,FN .... che corrispondono ad uno stesso parallelo. In effetto quando il piano meridiano AMD gira intorno dell' asse trasportando seco le rette MN ed MT, la prima non cessa di esser perpendicolare all'altra; oltrachè questa retta movibile MN, sempre compresa nel piano meridiano, è come questo (*n. 129*), perpendicolare successivamente ad ogni tangente MV del parallelo; dunque MN è perpendicolare a due tangenti, e per conseguenza normale alla superficie, in tutte le posizioni che piglia girando intorno all'asse AD. D'altra parte poichè in questo movimento il punto N della normale MN resta immobile, ne risulta che *tutte le normali condotte per la intera lunghezza di uno stesso parallelo, formano sempre un cono retto il cui vertice è sull' asse*; comechè questo vertice vada cambiando nel passare da un parallelo all' altro.

Dopo di aver fatto osservare queste proprietà generali e comuni a tutte le superficie di rivoluzione, andiamo ad occuparci della costruzione del piano tangente.

131. *Per un punto dato sopra una superficie di rivoluzione noto che n' è il meridiano, condurle un piano tangente.*

rendere semplici le costruzioni, scegliamo il nostro piano
ntale di maniera che sia perpendicolare all'asse di rivolu-
il quale essendo allora verticale, sarà proiettato orizzon-
te in un punto O, e verticalmente secondo la retta O′Z′.
ltre A′B′D′ la proiezione del meridiano *principale*; cioè
llo ch'è parallelo al piano verticale, e proiettato orizzon-
te su di OB parallela alla linea della terra. Qui cotal me-
è una ellisse di cui uno de' diametri principali coincide
sse di rotazione, e per conseguenza la superficie sarà
ssoide di rivoluzione (*n. 79*); ma i ragionamenti e le co-
i sarebbero interamente simili per tutte le altre curve
ne. Il massimo de'paralleli, o sia *l'equatore* della super-
videntemente il cerchio descritto dal semi-asse C′B′, il
proietta orizzontalmente su d'un cerchio BKE eguale
, e forma *il contorno apparente* della superficie, re-
nte al piano orizzontale (*n. 106*): coi fatti per tutta la
za dell'equatore (B′E′, BKE) i piani tangenti saranno
, avvegnachè ciascuno conterrà la tangente del meri-
quale è una verticale come B′B. Il contorno apparente
superficie rispetto al piano verticale, sarà il meridia-
ipale (A′B′D′E′, BE); perciocchè dev'essere formato
da i punti di contatto di tutt' i piani tangenti perpen-
l piano verticale: i quali lunghesso la curva meri-
(*n. 129*) tutti perpendicolari al suo piano, e per con-
al verticale di proiezione. Non aggiungeremo qui
ioni della generatrice per figurare (*n. 93*) la forma
rficie sufficientemente indicata da ciò che precede;
no nondimeno in seguito (*n. 137*) la maniera di co-
proiezioni di altrettanti meridiani quanti se no vor-
ciare.

posto, sia M la proiezione orizzontale del punto dato
ficie, la seconda sua proiezione non potrà esser presa
ente, poichè questo deve essere evidentemente situato
della verticale M col meridiano proiettato secondo
le fatto girare intorno dell' asse finchè coincida col

FIG. XXXXIV

principale OB, sarà allora proiettato verticalmente secondo A'B'D'; e posciachè mercè tal movimento la proiezione M avrà descritto l'arco MG, se ne conchiuderà che la proiezione verticale del punto cercato è di presente in G' o in G''. Adesso se si riconduca il meridiano movibile nella posizione OK, il punto in quistione, che durante questo movimento non cambierà di altezza, resterà proiettato verticalmente sull'orizzontale G'F', o G''F''; da cui segue ad evidenza che, nella sua posizione primitiva, era proiettato verticalmente in M', o M'', sicchè vi sono sulla superficie due punti (M, M') ed (M, M'') entrambi proiettati orizzontalmente in M.

FIG. XXXXIV

133. Consideriamo il primo (M,M') e per determinare il piano tangente che vi si riferisce, lo faremo passare *(n. 103)* per due tangenti alla superficie: cioè quella al meridiano e l'altra al parallelo; e attesochè la proiezione della curva meridiana relativa al punto (M,M') non è data immediatamente, che perciò non possiamo condurle direttamente una tangente, abbassiamo nuovamente il piano verticale OMK sul meridiano principale OB. Con che il punto (M,M') sarà trasportato in (G,G'), ed allora sarà facile di costruire la tangente G'H' che verrà a penetrare il piano orizzontale nel punto H su di OB: poscia ricondotto il meridiano movibile nella posizione OMK, il piede H di questa tangente descriverà evidentemente un arco di cerchio terminato in T, mentre il punto di contatto G' ritornerà in M'; dunque proiettando il punto T sulla linea della terra, si otterranno le proiezioni M'T' ed MT della tangente al meridiano che passa per il punto (M,M'). Osserviamo inoltre che prolungata questa tangente deve incontrare l'asse della superficie nello stesso punto Z' in cui terminava la retta G'H'.

In quanto al parallelo relativo a questo punto (M,M'), è desso evidentemente proiettato sopra il cerchio GMF, e su G'F'; per conseguenza la sua tangente è l'orizzontale (MV, M'V') perpendicolare al piano meridiano OMK. Ora il piano che comprenderà le due tangenti in tal guisa determinate, avrà per traccia orizzontale una retta TU che passa pel piede T della

angente, e condotta parallelamente ad MV, ch'è una li-
zontale in esso contenuta; poscia se ne avrà la traccia
e UV' costruendo il punto V' in cui la retta (MV, M'V')
ad incontrare il piano verticale.
no tangente relativo al punto (M,M'') si otterrà d'una
consimile, abbassando in prima il punto M'' in G'' sul
no principale, e conducendo a questo la tangente G''L'.
to riportato il piede (L,L') di questa retta sul meridia-
verrà in R; e poichè la tangente al parallelo è quì
''V''), le tracce del piano tangente saranno RS paral-
MV, ed SV''.
Giova osservare che, giusta la direzione della tangente
arallelo, ciascun piano tangente ad una superficie di ri-
e, avrà sempre *la sua traccia orizzontale perpendico-
uella del piano meridiano* che passa pel punto di con-
npre che l'asse della superficie sarà verticale.
Osserviamo ancora, che i due piani tangenti in (M,M')
'), avendo le loro tracce TU, ed RS parallele, dovran-
si secondo una orizzontale; la quale, in conseguenza
netria della superficie, sarà situata nel piano dell'equa-
. Co'fatti, siccome le tangenti G'H' e G''L' all'ellisse me-
incontrano necessariamente in un punto α situato so-
asse, questo punto trasportato in ε nel meridiano OK
tangenti, sarà loro sempre comune, e resterà nel pia-
uatore E'B': dunque l'orizzontale ch'è l'interseca-
ue piani tangenti, passerà pel punto ε, ed anche per
ione le loro tracce verticali devono tagliarsi in un
tuato sulla retta E'B'ε prolungata.
r ottenere la *normale* della superficie di rivoluzione
M,M') si terrà a memoria (*n. 130.*) che tutte le nor-
uno stesso parallelo, tagliano l'asse al medesi-
, e ciascuna è inoltre contenuta nel piano meridia-
sa per il punto di contatto; sicchè abbassato sul me-
ncipale il punto M' in G', si condurrà per questo una
perpendicolare alla tangente G'H'; e congiungen-

FIG. XXXXIV

do il piede N' di siffatta normale col punto dato M', si otterrà la normale N'M' relativa a quest' ultimo punto. Dessa è almeno la sua proiezione verticale: la orizzontale poi cade evidentemente sopra OM.

Osserviamo qui che questa normale essendo perpendicolare al piano tangente TUV', le tracce di questo dovranno essere (*n.33*) rispettivamente perpendicolari alle rette OM ed N'M'Y; ciò che offrirà una verifica delle costruzioni di già effettuate per il piano tangente, o anche se si vuole un mezzo da trovarne *a priori* le tracce; perciocchè allora farebbe mestieri condurre per un punto conosciuto (M,M') un piano perpendicolare alla retta (MO,M'N'). *Vedete n. 36.*

137. Si è osservato *n. 132* esser facile, partendo dalla proiezione orizzontale M d'un punto della superficie, ricavarne la proiezione verticale M', o M'': epperò se si applica il medesimo artifizio a' diversi punti K, M, Q... presi nel piano meridiano OK, si potrà così costruire la proiezione verticale della curva meridiana quivi contenuta, la quale dovrà esser tangente alle rette T'M', ed R'M''. Quindi ripetendo la medesima operazione per gli altri piani meridiani come OK, si otterrebbero quante posizioni si vogliano dell' ellisse movibile A'B'D', che servirebbero a compiere la rappresentazione grafica della superficie.

Parimenti con operazioni simili, date le proiezioni di qualunque *generatrice* d'una superficie di rivoluzione, se ne dedurrebbe facilmente il meridiano principale, o qualsivoglia altra sezione meridiana. Si potrà proporre ad esempio, il caso che questa generatrice sia una retta che non incontri l'asse, ed allora si troverà essere una iperbole il meridiano, come andremo ad osservare più innanzi (*n. 148*).

FIG. XXXXV 138. *Del piano tangente al toro.* Se si fa girare un cerchio (A'B'C'B'',ABC) intorno ad una retta (O''Z',O) che non passa pel suo centro, ma situata nel suo piano, questo meridiano circolare genererà una specie di *superficie anulare*, che appellasi *toro*, i cui punti saran tutti proiettati orizzontalmente, fra l'e-

o col raggio OC=O'C', ed il *circolo della gola*
ggio OA=O'A': ma fa mestieri osservar bene che
i B'C'B'', e B'A'B'' genereranno due falde dif-
forma, quantunque l'una e l'altra vengano a riu-
circonferenze percorse dalle estremità B', e B''
erticale. La falda esteriore è *convessa*, vale a di-
e tracciate da uno stesso punto (N,N') sareb-
un medesimo lato del piano tangente a que-
effetto per determinare il piano suddetto biso-
a tangente N'P' del meridiano, e pel suo pie-
una perpendicolare PP' alla traccia ON del
134); ora si vede che il meridiano B'N'B''ed
i' sono tutte e due a sinistra del piano tangente
itunque abbiamo preso il punto (N,N') sul meri-
e, a fine di rendere più semplice la costruzione del
, è evidentissimo che le medesime circostanze si
per ogni altro punto della falda esteriore, essen-
one, e per conseguenza simmetrica intorno al-

o se prendiamo un punto (M,M') sulla falda in-
o M''T'T, tangente in questo punto, traverserà
poichè il meridiano B'M'B'' sarà evidentemente
esto piano, mentre il parallelo M'V' sarà a si-
è il piano M'T'T taglierà il toro secondo una
rappresentata in proiezione orizzontale da (MHE
I), e che apprenderemo quanto prima a co-
5). Ma questa intersecazione non impedisce al pia-
comprendere le tangenti del meridiano, del pa-
tutte le altre curve tracciate sulla superficie dal
; di maniera che questo piano è realmente tangente
sto sito, e secante in tutti gli altri punti comuni;
e che la falda interna è una superficie *non con-
urvature opposte*, interamente paragonabile alla
irella.
lisegno attuale, col quale abbiamo voluto rappre-

sentare i principali paralleli della superficie, una parte della traccia verticale M'T'del piano tangente alla falda interna, giace è vero, nascosta dal toro; ma noi abbiamo dovuto nondimeno lasciarla con tratto pieno, posciachè essa riceve la proiezione verticale della curva d'intersecazione, il cui ramo interno *hrefg* è visibile sul piano verticale.

140. *Iperboloide di rivoluzione ad una falda.* Così abbiamo chiamata (*n. 48*) la superficie descritta da una *semiperbole* girante intorno del suo asse immaginario; la quale gode di molte proprietà riguardevoli, e può anche essere generata *da una retta assoggettata a girare con un movimento di rivoluzione, intorno ad un'altra fissa, che non giace nel medesimo piano della prima.*

FIG. XXXXVII

Rappresentiamo la retta fissa con OZ e la movibile con ADM: sia OD la loro più corta distanza che sarà orizzontale, se si tiene l'asse OZ come verticale. La linea OD descriverà col suo movimento di rivoluzione intorno ad OZ, un cerchio orizzontale EDF, che sarà evidentemente il più piccolo de'paralleli, ossia il *circolo della gola* della superficie, e la tangente DP a questo circolo sarà necessariamente la proiezione orizzontale della retta movibile ADM; la quale perciò anderà ad incontrare un piano meridiano qualunque ZOX, in un punto M situato sulla verticale innalzata dal punto P (*). Ora se si costruissero così tutt'i punti M, M', F,.... ne'quali il piano fisso ZOX è successivamente incontrato dalla retta movibile ADM nelle sue diverse posizioni, si otterrebbe la curva meridiana MM'F della superficie generata da questa retta; e per conseguenza la quistione è ridotta a provare che questa curva MM'F è una iperbole, che à per semi-

(*) La figura si suppone costruita in prospettiva in ZOX come piano del quadro; e per conseguenza le linee principali situate dietro di esso sono state punteggiate (1).

(1) Il piano ZOX dicesi ancora piano della prospettiva, o della parete.

distanza OF = OD. Per pervenirvi riferiamo un
ıque M con coordinate parallele agli assi OX, OZ:
a distanza OD resta invariabile durante il movi-
etta, del pari che l'angolo MDP formato dalla stes-
nte, poniamo

$= x$, $PM = z$, $OD = \delta$, tang. MDP $= \alpha$

oli rettangoli MPD ed ODP daranno

$$\text{ıng.MDP} = \frac{MP}{DP} = \frac{MP}{\sqrt{OP^2 - OD^2}}$$

i le notazioni precedenti

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 - \delta^2}} \quad \text{ovvero } \alpha^2 x^2 - z^2 = \alpha^2 \delta^2$$

one prova essere la curva meridiana una iperbole
-asse reale $x = \alpha$; dunque il luogo percorso dalla
ADM è effettivamente un' iperboloide di rivolu-
ılda.

superficie ammette una seconda generatrice ret-
se nel piano verticale MDP tangente al circolo
ıcci una retta BDN che faccia con la verticale DV,
eguale a VDM, questa linea BDN girando anche
genererà *la medesima superficie* di ADM, pe-
ıti qualunque M ed N, presi alla medesima altezza
te, descriveranno il medesimo circolo MNL. Per
st'ultima asserzione, basterà congiungere a due
,N,Z,V, in cui uno stesso piano orizzontale in-
e linee delle quali abbiamo testè cennato, e colla
ngoli rettangoli MVD, NVD, che sono evidente-
dimostrerà che i triangoli rettangoli ZVM, ZVN
per cui si conchiuderà che ZM=ZN, perlochè
ed N sono alla medesima distanza dall'asse OZ.
he sull' iperboloide stanno due ordini di linee

$$A, A_2, A_3 \ldots\ldots \text{ e } B, B_2, B_3, \ldots\ldots$$

ıuali si compone delle posizioni successive che

prende la generatrice AD, ed il secondo da quelle occupate da BD. Inoltre poichè tutte queste rette sono a due a due in piani verticali, tali che MDN, se ne deduce che *tutte le generatrici de'due sistemi si proiettano sul circolo della gola in linee tangenti alla sua circonferenza.*

142. Per ciascun punto R della superficie vi passano due di tali rette; stantechè le generatrici AD e BD passeranno in due tempi differenti della loro rivoluzione, pel suddetto punto R, e vi occuperanno due posizioni necessariamente distinte RA_3, RB_2, perocchè la prima sarà situata a sinistra, e la seconda a dritta del piano meridiano ZOR. Segue da ciò che il piano tangente in R sarà determinato (*n. 103*) dall'assieme delle due rette RA_3, e RB_2, poichè queste stanno sulla superficie, e sono esse stesse le proprio tangenti. Pure è importante di osservare, che quantunque il piano A_3RB_2 contiene la retta RB_2 tutta quanta, *non sarà tangente in niun altro punto di essa*; imperciocchè in D_2 per esempio, il piano tangente sarà per la stessa ragione di sopra $A_2D_2B_2$; ma questo non può coincidere con A_3RB_2, perchè le due generatrici A_2R, ed A_2D_2 appartenendo al medesimo sistema, non potrebbero essere contenute in un medesimo piano, la qual cosa or ora dimostreremo.

FIG. XXXXVII

143. *Due rette* AD, ed A_2D_2 *che appartengono al medesimo sistema di generatrici, non sono giammai in un medesimo piano.* In fatti queste rette proiettate orizzontalmente sulle tangenti DT, e D_2T che si tagliano in T, non potrebbero avere di comune che i punti situati sulla verticale TS; la quale avendo ad incontrare evidentemente B_2D_2 in S al di sopra del circolo della gola, ed AD al di sotto in S′, perchè le parti inferiori di queste due generatrici dello stesso sistema sono entrambe inclinate a sinistra de' loro meridiani rispettivi ZOD_2 e ZOD, ed il punto T è fra essi: dunque 1.° le rette AD ed A_2D_2 non possono incontrarsi; 2.° neppur sono parallele, perchè le loro proiezioni orizzontali si tagliano in T; per la qual cosa resta dimostrato che due generatrici del sistema A, non sono giammai in un medesimo piano.

n vero, le proiezioni orizzontali di due di queste rette saran-
parallele, quando si paragoneranno quelle che passano per le
emità d' uno stesso diametro del circolo della gola; ma nello
:io, una delle due generatrici sarà inclinata a dritta, e l'altra a
stra del piano meridiano condotto per questo diametro, in
sa che saranno ben lungi dall' essere parallele fra loro; nè
·a, siccome è chiaro, potranno anche tagliarsi.
dimostrerà di una maniera simile che le rette $B_1, B_2, B_3, \ldots$
econdo sistema non sono giammai a due a due in un me-
io piano.
{. *Ciascuna retta del sistema A taglia* (senza cangiare di
me) *tutte le rette $B_1, B_2, B_3, \ldots$ dell'altro sistema.* È ciò evi-
per AD, e BD che sono nel medesimo piano verticale,
ragoniamo ora AD con una retta qualunque B_2D_2 dell'al-
ema. Queste due linee sono anche proiettate sulle tangenti
hio della gola DT, e D_2T, le quali poichè si tagliano in
rticale TS′ dovrà necessariamente incontrare le rette in
e AD, e B_2D_2; ma questo incontro avrà luogo per ognuna
il di sotto del circolo della gola, atteso che DA è incli-
:nistra del meridiano ZOD, e D_2B_2 a dritta dell'altro
ddove il punto T sta fra'due. Inoltre è evidente, per la
la meridiana, che una retta qual'è TS′ parallela all'asse
può penetrare la superficie che in due punti, di cui un
rà sulla falda inferiore al circolo della gola, il quale per
iza dovrà coincidere con quelli in cui la verticale TS′ ha
ato le generatrici DA, e D_2B_2 che sono in su questa falda;
este generatrici si tagliano effettivamente nel punto S′.
solamente osservare che, quando si paragoneranno
ppartenenti una al sistema A, l'altra al sistema B, e
le estremità d'un medesimo diametro del circolo della
vranno proiezioni parallele, e nello spazio saranno
arallele l'una all'altra; di maniera che il loro incon-
più luogo che ad una distanza infinita, e saranno
medesimo piano.
erà in una maniera conforme che ogni generatrice

del sistema B taglia, senza cambiare di posizione tutte le generatrici del sistema A, o almeno è nello stesso piano con ciascuna di esso.

145. Si annoverano sotto il nome generale di *superficie storte* tutte le superficie generate da *una retta che si muove in maniera che le sue consecutive posizioni non sono a due a due in un medesimo piano*. Ora considerando l'iperboloide attuale, o come luogo delle diverse posizioni A, A_2, A_3, ... che prende la generatrice AD nel suo movimento di rivoluzione intorno ad OZ, ovvero come il luogo delle diverse rette B, B_2, B_3, ... dell'altro sistema, si vede (*n. 143*) che soddisferà alla definizione precedente; per conseguenza l'iperboloide di rivoluzione ad una falda appartiene a questa classe generale di superficie che si denominano *storte*, onde ci occuperemo in maniera particolare nel libro VII.

FIG. XXXXVII

146 Se per il centro O dell'iperboloide, si conducano parallelamente alle generatrici DA e DB due rette Oa ed Ob, queste formeranno angoli eguali colla verticale OZ, e però, girando intorno ad OZ, descriveranno un solo ed identico cono retto, i cui lati saranno tutti rispettivamente *paralleli alle generatrici* A, A_2, A_3, ... e B, B_2, B_3, ... dell'iperboloide. Sarà esso il *cono assintotico* di questa ultima superficie; poichè per dedurlo da quella, basta evidentemente di assumere.

$$OD = \delta = 0 \text{ in } \alpha^2 x^2 - z^2 = \alpha^2 \delta^2$$

che rappresentava (*n. 140*) il meridiano dell'iperboloide; ora in questa ipotesi, si ottiene; pel meridiano del cono retto $z = \pm \alpha x$; cioè due rette che sono con effetti gli assintoti dell'iperbole precedente,

147. Inoltre, quando si fa variare la distanza δ, senza cambiare α o l'inclinazione della generatrice AD, si ottengono successivamente diversi iperboloidi che hanno per meridiani curve *simili*; perciocchè gli assi della iperbole sono δ, ed $\alpha\delta$ ed il loro rapporto è α, quantità indipendente dalla distanza δ. Risulta da ciò che tutti quest'iperboloidi sono superficie simili e concentriche; la qual similitudine poichè deve estendersi an-

no assintotico pel quale δ è nulla, si potrà affermare
lo un medesimo piano taglierà l'iperboloide, ed il co-
ico, le sezioni fattevi, saranno *curve simili e concen-*
Questa osservazione ci sarà utile quanto prima.
po di aver fatto conoscere la natura, e le principali
ell'iperboloide generato dalla rivoluzione di una ret-
moci ora della sua rappresentazione esatta per mez-
ani di proiezione. Noi riguarderemo sempre l'asse
verticale, le sue proiezioni saranno O, ed IO'Z'; in-
retta movibile prendiamola in una posizione qualun-
ia questa proiettata secondo ADB, e A'D'c; dopo si
meridiano della superficie, cercando i punti ne'qua-
erticale O G è incontrato dalle posizioni successive
AB, A'c). Oramai siffatta retta nell'attuale posizione
iano OG nel punto (M,M''), appartenente alla
data, la quale dovrà *toccare* in questo punto
A'M''c. Di vero, quantunque nello spazio la
meridiano e la retta (AB, A'c) sieno molto di-
dall' altra, nondimeno sono amendue situate nel
te alla superficie nel punto (M, M''); e siccome
e necessariamente perpendicolare (*n.* 129) al piano
, e per conseguenza al verticale di proiezione, si
i che A' c si confonderà con la proiezione verti-
gente, cosicchè la retta A' c toccherà essa stes-
e della curva meridiana in M''.

FIG. XXXXVI

un punto qualunque (n, n') di AB, descriverà
imento di rivoluzione, un arco di cerchio proiet-
e sull'orizzontale n' N' : dunque questo punto
, arriverà nel piano verticale OG, si troverà pro-
I') ; il quale sarà un nuovo punto della curva
N'G''; e tutti gli altri si costruiranno della stes-
licando questo andamento all' estremità (D,D')

si applicata alla geometria delle tre dimensioni. *Ca-*

dell'orizzontale (OD,O'D',) ch'è nel medesimo tempo perpendicolare all' asse ed alla generatrice, e che misura la loro più corta distanza, si otterrà il punto (F,F') della meridiana il più vicino all'asse; il quale è quello che, nella rivoluzione compiuta della retta movibile, descriverà il più piccolo de'paralleli della superficie, o sia il circolo della gola, proiettato qui su DFE e su di E'F'. Parimenti il piede (A,A') della generatrice, descrivendo un cerchio ALG, che sarà la traccia orizzontale della superficie, darà il punto (G,G') del meridiano; e quantunque questa curva deve evidentemente estendersi d'una maniera illimitata, poichè la retta generatrice è di una lunghezza indefinita, nondimeno, per dare un' idea più netta della superficie, ammetteremo che la retta movibile sia terminata ai due punti (A,A') e (B,c) equidistanti dal punto (D,D') che descrive il cerchio della gola; in guisa che la parte di superficie che qui consideriamo sarà terminata da due cerchi eguali proiettati orizzontalmente sopra GAH, e verticalmente su G'H', e G''H''. Del resto noi abbiamo dimostrato (*n. 140*) che il meridiano G'F'G'' era un ramo d'iperbole che aveva per asse reale il diametro E'F' del cerchio della gola; e sarà di mestieri osservare che qui, ***come in ogni superficie di rivoluzione***, il meridiano principale G'F'G'' forma precisamente il contorno apparente della superficie per rispetto al piano verticale, perocchè tutt'i piani tangenti per la lunghezza di questo meridiano gli sono perpendicolari (*n. 129*.) Per eguale ragione il contorno apparente dell'iperboloide relativamente al piano orizzontale, è il cerchio della gola DFE, per tutta la lunghezza del quale i piani tangenti sono evidentemente verticali.

FIG. XXXXVI

149. Per compiere la rappresentazione grafica di quest'iperboloide, secondo la maniera di generazione prodotta da una linea retta, fa d'uopo costruire un certo numero di posizioni della generatrice rettilinea. Orpoi che questa deve restare ad una distanza costante dall'asse, la sua proiezione orizzontale sarà sempre tangente al cerchio DFE; conduciamo adunque a volontà la tangente $A_2D_2B_2$, dopo proiettiamo il piede A''_2 sulla linea del-

n A'_2, ed il punto di contatto D_2 sopra $E'F'$ in D'_2; allo-
mo $A'_2D'_2C_2$ per la proiezione verticale della retta che
tata orizzontalmente secondo A_2B_2. Inoltre, l'estremità
l cerchio superiore $G''H''$, dovrà evidentemente tro-
ettata in B_2, ciò che offrirà un mezzo di verifica. Le
ioni della generatrice si costruiranno d'una maniera
proiezioni verticali loro dovranno altresì *toccare* l'i-
eridiana, siccome l'abbiamo dimostrato nel nume-
nte per la prima retta ADB; solamente fa mestieri os-
e quando si sceglierà la proiezione orizzontale paral-
ea della terra, come KL, la verticale corrispondente
ssintoto dell'iperbole, poichè in effetto una genera-
non incontrerà il piano meridiano OG che ad una
nita, senza che cessi di essere, in proiezione verticale,
'iperbole meridiana.
ttenere risultamenti più simmetrici, nell'attuale di-
iviso il cerchio GAH in quattordici parti eguali, e
te le corde AB, A_2B_2, A_3B_3, ... di maniera che
medesimo numero di archi parziali; sicchè queste,
essariamente, son risultate tangenti ad un me-
o EDF, se ne son poi dedotte le proiezioni ver-
detto al numero precedente. Inoltre, quantunque
inassero a due a due a' medesimi punti di divi-
io GAH, si distingueranno facilmente le parti si-
del cerchio della gola da quelle al di sopra, poi-
essendo invisibili sul piano orizzontale, sono
te da *linee punteggiate*. In quanto al piano ver-
lelle generatrici situate di là del piano meridia-
ntiene il contorno apparente della superficie (*n.*
questo piano di proiezione, sono le sole che di-
han dovuto *punteggiarsi*.
141) che l'iperboloide ammette un altro siste-
rettilinee, proiettate egualmente sulle tangenti
gola AB, A_2B_2...., ma nello spazio hanno esse
ersa in faccia alla verticale. A ragion d'esem-

pio quella di queste nuove rette, la quale fosse proiettata secondo BDA (*), avrebbe il suo piede in (B, B') e la estremità superiore in (A, α), mentre taglierebbe la retta ADB del primo sistema nel punto (D, D'); così avrebbe per proiezione verticale $B'D'\alpha$, linea che ha già ricevuta la proiezione di una retta LMC del primo sistema. Per evitare questa coincidenza, non abbiamo voluto rappresentare sul disegno tutte insieme le generatrici de' due sistemi; posciachè altrimenti facendo, le parti piene delle une, cadendo sulle punteggiate delle altre, non avrebbero fatto più distinguere le parti visibili o invisibili di ciascuno de' sistemi. Al più, sarà sempre facile, anche sul disegno attuale, di ritrovare le rette del sistema B quando se ne avrà bisogno, poichè basterà di prendere le parti piene per le punteggiate, e reciprocamente, come abbiam noi ora indicato per la retta BDA. Si potranno così moltiplicare di più le generatrici, a fine di ottenere maggior *effetto* nel disegno; ma qui si è creduto miglior consiglio di sacrificare qualche cosa sotto quest'ultima veduta, per offrire più nettezza nella posizione de' punti e delle linee rimarchevoli che bisognava indicare al lettore.

FIG. XXXXVI

152. *Del piano tangente all' iperboloide.* Sia R la proiezione orizzontale del punto di contatto, assegnato dalla quistione; per ottener l'altra osservo che, pel punto considerato sulla superficie, passa una generatrice del sistema A, la quale è proiettata orizzontalmente secondo una tangente PRA al cerchio della gola, e verticalmente secondo $P'\alpha$; se dunque proietto R in R' su quest'ultima retta, avrò compiutamente determinato il punto di contatto (R, R'). Ma vi è una seconda soluzione; perocchè potendo condurre da R un'altra tangente BRQ al cerchio della gola, la quale rappresenterà così una generatrice del sistema A proiettata verticalmente secondo $B'Q''$, non avrò che a proiettare R in R'' su quest'ultima linea, ed otterrò un secondo pun-

(*) Per indicare più chiaramente la situazione delle diverse rette, avremo cura di citare sempre in primo luogo la lettera che dimostra l' estremità *inferiore* della retta, onde avremo a parlare.

'') che sarà situato sull' iperboloide, ed avrà similmente
roiezione orizzontale in R.
Ciò posto, consideriamo il punto (R,R') e ricordia-
. 142) che per quest' unico punto devono passare due
ici dell'iperboloide; una è la retta (PRA,P'R'₂) oramai
ı ed appartenente al sistema A; l'altra appartenente al
, proiettata secondo (QRB,Q'R'₆). Per conseguen-
tangente in (R,R') dovrà contenere queste due rette,
ı sua traccia orizzontale sarà QPS. Per determinarne
, basterà immaginare in esso e pel punto (R,R'),
ıtale le cui proiezioni saranno RV parallela alla trac-
ed R'V' alla linea della terra; poscia costruire il
V') dov'essa penetra il piano verticale.
› al piano tangente relativo al punto (R,R''), esso
inato per mezzo delle due rette di sistemi opposti,
agliano. Una è (BRQ,B'R''Q'') pel sistema A, l'altra
''P'') pel sistema B; e però la traccia orizzontale di
sarà la linea AB, e la verticale si otterrà come qui
nte una orizzontale condottavi a partire dal punto

niamo al piano tangente PSV' che tocca l'iperbo- FIG. XXXXVI
o (R,R'), ed osserviamo che la sua traccia orizzon-
pendicolare al piano meridiano OR che passereb-
li contatto, ciò che deve verificarsi (*n. 134.*) per
; di rivoluzione il cui asse è verticale. Ma questo
ın è tangente all'iperboloide in ogni altro punto,
T') della retta (PRA,P'R'₂) contenutavi; poichè
rizzontale PQ non sarebbe perpendicolare al me-
ltre, per questo punto (T,T') della retta (PRA,
›artiene al sistema A, passa una generatrice
del sistema B, la quale è evidentemente situata
di cui è parola; avvegnachè il suo piede è in H
zione PQ. Per conseguenza il piano PSV' non
o (T,T') alla definizione del vero contatto, che
enere le tangenti a tutte le linee situate sulla su-

perficie; mentre nel punto (R, R') contiene non pure le due generatrici che si tagliano, ma eziandio la tangente del parallelo ch'è precisamente (RV,R'V'), quella del meridiano, e la tangente di ogni altra curva tracciata per questo punto sull'iperboloide.

Noi parlando dell'iperboloide storto abbiamo già dimostrato questa proprietà singolare del piano tangente (*n. 142.*); ma credemmo dovere insistere su tale circostanza e convalidarla qui con novelle considerazioni, perciocchè è importante di formarsi un idea ben chiara della posizione di un piano il quale in tal guisa è *tangente in un punto* (R,R'), e *secante in tutti gli altri* comuni con la superficie, che taglia qui secondo le due rette (PRA,P'R'a) e (QRB,Q'R'c).

155. Tutt'i problemi relativi a'piani tangenti, che abbiamo risoluto in questo libro, si sono aggirati intorno a superficie *cilindriche*, *coniche*, o di *rivoluzione*. Noi non aggiungeremo ora nuovi esempi per altri generi di superficie, perchè il metodo si riduce in tutt'i casi a servirsi del magistero seguito al (*n. 103*), che spesso avremo in seguito, opportunità di applicare in varie e molte congiunture; resterebbe fradittanto a trattarsi la quistione del piano tangente *allorchè il punto di contatto non è dato* sulla superficie. Noi l'abbiamo fatto immediatamente pe'cilindri ed i coni, perchè la soluzione era semplice, nè vi era motivo da differirla; ma non avviene lo stesso per le altre superficie, onde qualche volta fa mestieri di ricorrere a'metodi relativi alle intersecazioni delle superficie. Laonde riferiremo i problemi di questo genere in uno de' seguenti libri.